Colles de mathématiques

Arthur Touati

PCSI 1, Louis-le-Grand, Brice Touzillier
PCSI, Henri 4, Cyrille Hériveaux
PC* 3, Louis-le-Grand, Thomas Lafforgue

Table des matières

Première partie

Programme de PCSI

1 Calcul algébrique, réels et complexes

Exercice 1. Calculer $\int_0^{2\pi} \cos^n(t)\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Pour n et p premiers entre eux et ω une racine n-ième de l'unité, calculer $\sum_{k=1}^{n} \omega^{kp}$.

Exercice 4 (Noyau de Dirichlet)**.** Simplifier les expressions suivantes :

$$D_n(x) = \sum_{p=-n}^{n} e^{ipx} , \qquad F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n} D_p(x).$$

Exercice 5. Calculer $\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. On pose $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f^{(n)}(0)| \leq n!$.

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2$.

Exercice 8. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{x+i}{m} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 9. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer $\prod_{k=0}^{n} \cos(2^k x)$.

Exercice 10. Résoudre, lorsqu'elle a un sens, l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = 0.$$

Exercice 11. Quelle est l'image de $\mathbb{U}\backslash\{1\}$ par l'application $z \longmapsto \frac{1}{1-z}$?

Exercice 12. Quelle est l'image de $\mathbb{C}$ par l'application $z \longmapsto \frac{z+|z|}{2}$?

Exercice 13. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $y_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k.$$

Exercice 14. Soient u et v deux nombres complexes, montrer que :

$$|u| + |v| \leq \sqrt{2} \max(|u+v|, |u-v|).$$

Exercice 15. Soit $\alpha \in]0,1]$, montrer que pour tout $x, y \geq 0$ on a $|x^\alpha - y^\alpha| \leq |x-y|^\alpha$.

Exercice 16. Montrer que parmi tout ensemble de treize réels distincts, on peut en trouver deux (a et b) vérifiant

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} < 2 - \sqrt{3}.$$

2 Calcul intégral

Exercice 17. Calculer la primitive suivante en précisant le domaine :

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{1+e^u}.$$

Exercice 18. Soit $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(a-x) = f(x)$ pour tout $x \in [0,a]$. Que dire du graphe de f ? Montrer l'égalité

$$\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 19. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\mathrm{d}x.$$

Exercice 20. Calculer la primitive suivante en précisant le domaine :

$$\int \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Exercice 21. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable à dérivée continue telle que $f(a) = f(b) = 0$. Pour $c \in [a,b]$ montrer l'égalité

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (c-x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 22. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\ln\left(1+e^{\sin(x)}\right)\mathrm{d}x.$$

Exercice 23. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 24. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \sqrt{t(1-t)}\mathrm{d}t.$$

Exercice 25. Calculer la primitive suivante en précisant le domaine :

$$\int \frac{\arctan^2(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Exercice 26. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\mathrm{d}t.$$

Exercice 27. Pour $x \in \mathbb{R}$, simplifier l'expression suivante :

$$\int_0^{\cos^2(x)} \arccos\left(\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t + \int_0^{\sin^2(x)} \arcsin\left(\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t.$$

3 Equations différentielles I

Exercice 28. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + y' + y = 0$.

Exercice 29. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $xy' + y = 0$.

Exercice 30. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' + y\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

Exercice 31. Soit $y' + a(x)y = b(x)$ une équation différentielle sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe deux solutions distinctes ϕ et ψ qui tendent vers 0 en $+\infty$. Montrer que toutes les solutions tendent vers 0 en $+\infty$.

Exercice 32. Déterminer les fonctions f dérivables sur $]0, +\infty[$ telles que

$$\forall x > 0,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{4x}\right).$$

Exercice 33. Résoudre sur $]-1, +\infty[$ l'équation $(1 + x)y' + y = 1 + \ln(1 + x)$.

Exercice 34. Trouver les fonctions continues f telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x (x - t)f(t)\mathrm{d}t = x.$$

Exercice 35. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$.

Exercice 36. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe y solution de $y' = f \circ y$. Montrer que y est monotone.

Exercice 37. Déterminer les fonctions dérivables f définies sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x).$$

Exercice 38. Trouver les fonctions continues f telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 39. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $T-$périodique. Montrer que $y' + ay = f$ admet une unique solution $T-$périodique.

Exercice 40. Résoudre sur un intervalle convenable l'équation $y'(x) = \cos(x + y(x))$.

Exercice 41. Résoudre le système :

$$f' = f - g \quad \text{et} \quad g' = f + g,$$

avec $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$.

Exercice 42. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $xy' = y + x$.

4 Ensemble et raisonnement

Exercice 43. Soient E et F deux ensembles telle qu'il existe $f : E \longrightarrow F$ injective, montrer qu'il existe $g : F \longrightarrow E$ surjective.

Exercice 44. Soit E un ensemble et $f \in E^E$ telle que $f \circ f \circ f = f$, montrer que :

$$f \quad \text{injective} \iff f \quad \text{surjective}.$$

Exercice 45. Soit A un ensemble, montrer l'équivalence entre les deux énoncés suivants :

$$A \quad \text{est infini} \quad \Longleftrightarrow \exists f : \mathbb{N} \longrightarrow A \quad \text{injective.}$$

Application : soit A un ensemble dont toute partie est finie ou cofinie, montrer que A est fini.

Exercice 46. Soit A un ensemble, montrer l'équivalence entre les deux énoncés suivants :

$$A \quad \text{est infini} \quad \Longleftrightarrow \forall f \in A^A,\ \exists X \in \mathcal{P}(A) \backslash \{A, \emptyset\},\ f(X) \subset X.$$

Exercice 47. Montrer que toute fonction réelle s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 48. Trouver les fonctions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) + f\left(f(n)\right) + f\left(f\left(f(n)\right)\right) = 3n.$$

Exercice 49. Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(n+1) > f \circ f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $n > p$, alors $f(n) > p$, en déduire que f est croissante.
2. En déduire que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 50. Soient deux familles $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_i)_{i \in I}$. Montrer que :

$$\bigcap_{J \sqcup K = I} \left[\bigcup_{j \in J} A_j \cup \bigcup_{k \in K} B_k \right] = \bigcup_{i \in I} A_i \cap B_i.$$

Exercice 51 (Principe des tiroirs)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_{n+1}$ dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe i et j distincts tels que $|x_i - x_j| \leq \frac{1}{n}$.

Exercice 52. Soit a, b, c dans $\mathbb{N}^*$ tels que $a^2 + b^2 = c^2$. On suppose que a, b, c n'ont pas de diviseurs communs, montrer que c est impair.

Exercice 53. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1$ est divisible par 9.

Exercice 54. Soient X et Y deux ensembles. Montrer que $X \subset Y$ ssi $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(Y)$.

Exercice 55. Soit E un ensemble et A et B deux parties de E, on définit $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ par $f(X) = (A \cap X) \cup (B \cap \overline{X})$. Résoudre l'équation $f(X) = \emptyset$.

Exercice 56. Soit E un ensemble et A et B deux parties de E, on définit $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$. Trouver une CNS sur A et B pour que soit injective (resp. surjective).

Exercice 57. Montrer que toute fonction continue $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire $f = g + c$ où c est une constante et où $\int_0^1 g = 0$. La décomposition est-elle unique ?

Exercice 58 (Fonction 91 de McCarthy)**.** Soit f définie sur $\mathbb{Z}$ telle que

$$f(n) = \left\{ \begin{array}{ccc} n - 10 & \text{si} & n \geq 101 \\ f(f(n+11)) & \text{si} & n \leq 100 \end{array} \right. .$$

Calculer $f(n)$ pour $n \leq 101$.

Exercice 59. Montrer qu'il n'existe pas deux parties A et B de $\mathbb{R}$ vérifiant $A \times B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1\right\}$.

Exercice 60. Soit $(x_k)_{k\geq 1}$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\sum_{k=1}^n x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2$ pour tout $n \geq 1$. Calculer x_k pour $k \geq 1$.

Exercice 61 (Théorème de Cantor)**.** Soit E un ensemble, montrer qu'il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 62. Pour $n \geq 2$, est-ce que $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ peut être entier ?

Exercice 63 (Critère divisibilité par 4)**.** Montrer que $4|5^k - 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on défini $\psi(p)$ comme la somme des chiffres de l'écriture en base 5 de p. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $N(p) \in \mathbb{N}^*$ tel que $\psi^{N(p)}(p) \in [\![1, 4]\!]$. En déduire le critère suivant :

$$4|p \iff \psi^{N(p)}(p) = 4.$$

Exercice 64 (L'inégalité arithmético-géométrique)**.** On considère l'ensemble

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*,\ (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\}.$$

Montrer que si $n \in A$, alors $2n \in A$ et $n - 1 \in A$. En déduire que $A = \mathbb{N}^*$.

Exercice 65. Soit E un ensemble et $F = E^E$, on définit sur F la relation suivante :

$$\forall f, g \in F,\ f \sim g \iff \exists \varphi \in \mathrm{Bij}(E),\ f \circ \varphi = \varphi \circ g.$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence et trouver la classe d'équivalence de Id_E.

Exercice 66. Soit E un ensemble et $F = E^E$, on définit sur F les relations suivantes :

$$\begin{aligned} f \sim g &\iff \exists n \in \mathbb{N}^*,\ f^n = g^n, \\ f \simeq g &\iff \exists n, m \in \mathbb{N}^*,\ f^n = g^m. \end{aligned}$$

Montrer que ce sont des relations d'équivalence et montrer que toute classe pour $\simeq$ est réunion de classes pour $\sim$.

Exercice 67. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations d'équivalence sur un ensemble E. On définit la relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ par

$$x\mathcal{S} \circ \mathcal{R}y \iff \exists z \in E, x\mathcal{S}z \wedge z\mathcal{R}y.$$

Montrer que $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ssi $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.

5 Suites réelles

Exercice 68. On considère des réels $x_1, \ldots, x_n > 0$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$. Montrer que :

$$\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \max_{k=1,\ldots,n} x_k. \tag{1}$$

Exercice 69. Soient deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^*$ telles que

$$\frac{p_n}{q_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}.$$

Montrer que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 70. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $u_{u_n} = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et donner sa valeur.

Exercice 71. Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijective telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi(n)}{n}$ existe, donner la valeur de cette limite. Donner un exemple de bijection $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ait pas de limite.

Exercice 72. Soit$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ; on pose $u_n = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_n}}}$. Trouver la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

— $\exists a > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = a.$

— $\exists \lambda > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda^{2^{n+1}}.$

Montrer l'équivalence suivante :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \iff \left(a_n^{\frac{1}{2^n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}$$

Exercice 73. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que leur somme et leur produit converge vers 0. Montrer qu'elles convergent toutes les deux vers 0.

Exercice 74. Montrer que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Exercice 75. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels telle que $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que $\mathrm{Adh}(u)$ est un intervalle.

Exercice 76 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, en considérant l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k \geq n,\ u_n \geq u_k\},$$

montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite monotone. En déduire que toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence.

Exercice 77. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels, montrer l'équivalence suivante :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \iff \mathrm{Adh}(u) = \{a\}.$$

Exercice 78. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels telle que $\left(u_n + \frac{u_{2n}}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 79 (Le nombre d'or)**.** Etablir l'égalité suivante :

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\cdots}}.$$

Exercice 80. Déterminer la limite de la suite $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

Exercice 81. Soit $a > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_0 + \cdots + u_n}$. Trouver la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $u_{n+1} - u_n$ tend vers $\frac{1}{2}$ et en déduire que

$$\frac{2u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Exercice 82 (Suites de Schwob)**.** Soient $0 < a < b$, on définit deux suites réelles par $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et pour $n \in \mathbb{N}$

$$b_{n+1} = \sqrt{b_n a_{n+1}} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite. Si $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ est tel que $a = b\cos(\theta)$, calculer cette limite en fonction de θ.

Exercice 83 (Les suites sous-additives)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $u_{n+m} \leq u_n + u_m$. Montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\inf_{n\geq 1} \frac{u_n}{n}$.

Exercice 84. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, pour $n \geq 1$ on pose $y_n = x_{n-1} + 2x_n$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 85. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$\forall x > 0,\ f(f(x)) = 6x - f(x).$$

Exercice 86. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, montrer l'équivalence :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est stationnaire}$$

Exercice 87. Déterminer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = n.$$

Exercice 88. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + a_n$. Etudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :
— $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = a$.
— $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Exercice 89. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Montrer que :

$$u_n^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Exercice 90. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, montrer la caractérisation suivante :

$$\ell \in \mathrm{Adh}(u) \iff \forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Soit $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{Adh}(u)$ convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$, montrer que $\ell \in \mathrm{Adh}(u)$.

Exercice 91. Trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{Adh}(u) = \mathbb{N}$. En utilisant la dénombrabilité de $\mathbb{Q}$, trouver une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\mathbb{Q} \subset \mathrm{Adh}(v)$. En déduire que $\mathrm{Adh}(v) = \mathbb{R}$.

6 Calcul matriciel

Exercice 92 (Lemme de Hadamard)**.** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on ait

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|.$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 93. Soient A, B, C des matrices carrées telles que $ABC = 0$, montrer qu'au plus l'une d'entre elles est inversible.

Exercice 94. Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Exercice 95. Est-ce que $GL_n(\mathbb{K})$ est stable par addition ?

Exercice 96. Montrer que toute matrice carrée se décompose de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 97. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda AB = A + B$. Montrer que $AB = BA$.

Exercice 98. On dit qu'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un damier lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ (i - j \text{ impair} \Longrightarrow a_{ij} = 0).$$

Montrer que l'ensemble des damier de taille n est stable par produit. Montrer que si A est un damier inversible, alors son inverse est aussi un damier.

Exercice 99. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente, montrer que $I_n - A$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de A.

Exercice 100. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $a + d \geq b + c$ et $a \geq b \geq c \geq d$. On note $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n + d_n \geq b_n + c_n$.

Exercice 101. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer les deux équivalences suivantes :

1. $(\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = BA) \iff \exists \lambda \in \mathbb{K},\ A = \lambda I_n$.
2. $(\forall B \in GL_n(\mathbb{K}),\ AB = BA) \iff \exists \lambda \in \mathbb{K},\ A = \lambda I_n$.

Exercice 102.

1. Soit A une matrice carrée de rang r, montrer qu'il existe P, Q inversibles telles que $A = PJ_rQ$, où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Soit A une matrice carrée, montrer qu'il existe P, Q inversibles telles que $A = P + Q$.

Exercice 103. On dit qu'une matrice est positive si tous ses coefficients sont positifs et qu'elle est monotone si elle est inversible d'inverse positif. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer les deux équivalences suivantes :

1. $A \geq 0 \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}),\ (X \geq 0 \Longrightarrow AX \geq 0)$.
2. A monotone $\iff \forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}),\ (AX \geq 0 \Longrightarrow X \geq 0)$.

Exercice 104 (Densité des matrices inversibles)**.** Pour $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\|M\| = \max_{i,j} |m_{ij}|$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in GL_n(\mathbb{K}),\ \|A - B\| \leq \varepsilon.$$

7 Analyse réelle

Exercice 105. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant :
- $\forall x, y > 0,\ f(xf(y)) = yf(x)$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 106. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que pour tout $x \in [0,1]$ on ait $f(x^2) = f(x)$.

Exercice 107. Trouver les fonctions f continues en 0 et telles que pour tout x réel on ait

$$f(2x) - f(x) = x.$$

Exercice 108. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante telle que $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante, montrer que f est continue.

Exercice 109. Trouver les fonctions f telles que pour tout $x < y$ on ait

$$f(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f(y).$$

Exercice 110. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f' converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Montrer que

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Exercice 111. Soit f une fonction dérivable en 0 telle que pour tout x, y réels on ait $f(x+y) = f(x) + f(y)$, déterminer f.

Exercice 112. Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f > g > 0$. Montrer qu'il existe $k > 1$ tel que $f \geq kg$.

Exercice 113. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\ell \in \mathbb{R}$, montrer l'implication suivante :

$$f(x+1) - f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \Longrightarrow \frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Exercice 114. Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue, montrer que f admet un point fixe. On suppose qu'il existe $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue telle que $f \circ g = g \circ f$, montrer que $g - f$ s'annule.

Exercice 115. Existe-t-il f continue telle que $f \circ f = -\mathrm{Id}$?

Exercice 116. Trouver les fonctions involutives de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 117. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue surjective, montrer que f s'annule une infinité de fois.

Exercice 118. Soient f et g continues telles que $f \circ g = \mathrm{Id}$, montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 119. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f^2 + (1 + f')^2 \leq 1.$$

Montrer que f est nulle.

Exercice 120. 1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$. Montrer que f' s'annule.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Montrer que f' s'annule.

Exercice 121. Soit f dérivable. Montrer que

$$\forall x > 0,\ \exists c > 0,\ \frac{f(x) - f(-x)}{x} = f'(c) + f'(-c).$$

Exercice 122. 1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable s'annulant n fois, montrer que f s'annule au moins $n-1$ fois.

2. Montrer que pour tout polynôme P, l'ensemble suivant est fini :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = e^x\}.$$

Exercice 123. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f'(x)+f(x)) = \ell$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Exercice 124. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que les 2 conditions suivantes impliquent la continuité de f en x :

1. $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \left(x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \Longrightarrow f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)\right)$.
2. $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \left(x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \Longrightarrow (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\right)$.

Exercice 125 (Fonction de Thomae)**.** On définit f par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si} \quad x = \frac{p}{q} \text{ avec } p \wedge q = 1 \end{cases}.$$

Montrer que f est continue en x si et seulement si $x \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 126. Trouver les fonctions f telles que

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a\right) \Longrightarrow \left(\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)\right).$$

Exercice 127. 1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f_{|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ est injective, montrer que f est injective.

2. On définit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 2x^2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Montrer que $g_{|\mathbb{Q}}$ est injective mais que g ne l'est pas.

Exercice 128. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que pour tous $a < b$ réels, $f([a,b])$ est un segment de longueur $b - a$.

Exercice 129 (Théorème de Darboux)**.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, montrer que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

8 Analyse asymptotique

Exercice 130 (Lemme de l'escalier)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} - u_n \sim \ell$ où $\ell \neq 0$. Montrer que $u_n \sim n\ell$.

Exercice 131. Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ possède une unique solution x_n dans $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$. Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n.

Exercice 132. Soit f décroissante telle que

$$f(x) + f(x+1) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Etudier la limite de f en $+\infty$ et donner un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

Exercice 133. Donner un équivalent de $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ en $+\infty$.

Exercice 134. On pose $u_{n+1} = \arctan(u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}_+$. Donner un équivalent de u_n.

Exercice 135. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$, montrer que u_n est équivalent à $\frac{1}{n}$.

Exercice 136. Donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=0}^{n} k!$.

Exercice 137. On pose $u_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, donner un équivalent de u_n.

Exercice 138. Pour $n > 0$, montrer que l'équation $x^n = -\ln(x)$ admet une unique solution $x_n > 0$. On pose $u_n = 1 - x_n$, montrer que $nu_n \sim -\ln(u_n)$.

Exercice 139. Soient u_0 et u_1 strictements positifs et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{1+u_n u_{n+1}}$. En considérant $\frac{1}{u_n^2}$, donner un équivalent de u_n.

Exercice 140. On considère quatre suites de réels strictement positifs telles que :

$$a_n \sim b_n \qquad c_n \sim d_n.$$

Montrer que $a_n + c_n \sim b_n + d_n$.

Exercice 141. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$, donner un équivalent de u_n.

Exercice 142. On considère la suite définie pour $n \geq 1$:

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}.$$

Montrer que $u_n \leq n$ puis que $u_n = o(\sqrt{n})$. Trouver la limite de $u_n - \sqrt{n}$.

Exercice 143. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $u_{n+1} = |u_n - n|$, donner un équivalent de u_n.

Exercice 144. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction $f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x + x - n$. Montrer qu'il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$. Donner un développement limité à l'ordre 3 de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

9 Dénombrement

Exercice 145. Soit E un ensemble à n éléments. Combien y a-t-il de couples (A, B) de parties de E vérifiant $A \subset B \subset E$?

Exercice 146. Combien y a-t-il de parties de $[\![1, n]\!]$ contenant au moins un entier pair ?

Exercice 147. Déterminer le nombre d'applications injectives d'un ensemble de p éléments dans un ensemble de n éléments.

Exercice 148. Montrer de manière combinatoire l'égalité suivante :

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 149. On suppose que n droites sont telles que deux d'entre elles ne soient pas parallèles et que trois d'entre elles ne soient pas concourantes. Combien déterminent-elles de régions du plan ?

Exercice 150 (Les dérangements)**.** On note D_n le nombre de dérangement de $[\![1, n]\!]$. Montrer que pour tout $n > 1$, on a $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$. En déduire que $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$, puis que

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Exercice 151. Pour f une application, on note $\mathrm{Fix}(f)$ l'ensemble de ses points fixes. Montrer que

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |\mathrm{Fix}(\sigma)| = n!.$$

On introduira le nombre $p_n(k)$, le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui ont exactement k points fixes.

Exercice 152. On doit placer autour d'une table ronde un groupe de n couples hétérosexuels. Combien existe-t-il de dispositions :

- au total ?
- en respectant l'alternance des sexes ?
- sans séparer les couples ?
- en respectant les deux conditions précédentes ?

Exercice 153. Soit a_n le nombre de manières de recouvrir un damier de dimension $2 \times n$ avec des pièces de dimension 1×2. En posant $a_0 = 1$, trouver l'expression de a_n.

Exercice 154 (Nombres de Bell)**.** Soit B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. Trouver une relation de récurrence entre B_n et les B_k pour $k \leq n - 1$.

Exercice 155. Dénombrer les applications $f : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$ vérifiant $f \circ f = f$.

Exercice 156. Soit $A \subset \mathbb{R}$ de cardinal $n \in \mathbb{N}$, on pose $B = \{a + b \mid (a, b) \in A^2\}$, montrer que :

$$2n - 1 \leq |B| \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

Etudier les cas d'égalités.

Exercice 157. Soit E un ensemble à $n \in \mathbb{N}^*$ éléments, calculer la somme

$$\sum_{A, B \subset E} |A \cap B|.$$

10 Polynômes

Exercice 158. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et a, b deux réels. Donner le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.

Exercice 159. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ positif, montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

Exercice 160. Que dire d'un polynôme P tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait $P^{(k)}(0) = 0$?

Exercice 161. Montrer que les fonctions sin et tan ne sont pas des polynômes.

Exercice 162. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$

Montrer que P_n n'a pas de racines multiples, et que P_{2n} n'a pas de racines réelles. Montrer que P_{2n+1} admet une unique racine réelle, notée a_n, donner la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 163. Déterminer les polynômes P tels que $P \circ P = P$.

Exercice 164. Déterminer les polynômes P tels que $P(0) = 0$ et vérifiant

$$P(X^2+1) = P(X)^2 + 1.$$

Exercice 165. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ qui a toutes ses racines réelles, montrer que c'est aussi le cas de P'. En déduire que les racines de P^2+1 sont non-réelles et simples.

Exercice 166. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ qui a toutes ses racines réelles, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x)^2 \geq P(x)P''(x).$$

Exercice 167. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré plus grand que 2, scindé à racines simples, montrer que P ne peut avoir deux coefficients successifs nuls.

Exercice 168. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré plus grand que 2, scindé à racines simples, montrer qu'aucun coefficient de P ne peut être nul et encadré par deux coefficients non-nuls de même signe.

Exercice 169 (Calcul de $\zeta(2)$)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence d'un unique polynôme P_n vérifiant

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[,\ P_n\left(\cot^2(x)\right) = \frac{\sin\left((2n+1)x\right)}{\sin^{2n+1}(x)}.$$

Sachant que pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\cot^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \cot^2(x)$, trouver la limite de la suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 170. Soit $n \geq 1$ et $a_1, \ldots, a_n$ des entiers relatifs deux à deux distincts, on pose

$$P = (X-a_1)\cdots(X-a_n) - 1.$$

Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 171. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, on pose $M = \max_{0\leq i\leq n-1} |a_i|$. Pour toute racine r de P, montrer que $|r| \leq 1 + M$.

Exercice 172. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non-constant dont les racines complexes ont des parties imaginaires positives, montrer que $P + \overline{P}$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 173. Déterminer les polynômes vérifiant $P(X) = P(1 - X)$.

Exercice 174. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathbb{R}[X],\ f_{\big|]a-\varepsilon,a+\varepsilon[}(x) = P_{\big|]a-\varepsilon,a+\varepsilon[}(x).$$

Montrer que f est un polynôme.

Exercice 175. Déterminer les polynomes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$\{z \in \mathbb{C} \mid P(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid P \circ P(z) = 0\}.$$

Exercice 176. Soit $n \in \mathbb{N}$, trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X)^n = P(X^n)$.

Exercice 177. Trouver les polynômes vérifiant $P(X^2 - 1) = P(X - 1)P(X + 1)$.

Exercice 178 (Nombres algébriques et transcendants)**.** On note $\mathfrak{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists P \in \mathbb{Z}[X],\ P(x) = 0\}$. Montrer que $\mathfrak{A}$ est stable par addition, produit et passage à l'inverse. Montrer que $\mathfrak{A}$ est dénombrable et en déduire que $\mathbb{R}\backslash\mathfrak{A}$ est en bijection avec $\mathbb{R}$.

Exercice 179 (Transcendance de e)**.** Supposons qu'il existe des entiers $a_0, \dots, a_n$ tels que $a_0 + a_1 e + \cdots + a_n e^n = 0$ avec $a_0 \neq 0$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $I_P(t) = \int_0^t e^{t-u} P(u) \mathrm{d}u$, montrer que :

$$I_P(t) = e^t \sum_{i=0}^{\deg(P)} P^{(i)}(0) - \sum_{i=0}^{\deg(P)} P^{(i)}(t).$$

2. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $P(X) = X^{p-1}(X-1)\cdots(X-n)$ et $J = a_0 I_P(0) + a_1 I_P(1) + \cdots + a_n I_P(n)$. Montrer que J est entier que $(p-1)!$ divise, et que $J \neq 0$ pour p premier assez grand.
3. Montrer que $(p-1)! \leq |J| \leq C^p$ pour $C > 0$. En déduire que e est transcendant.

Exercice 180 (Polynômes de Lagrange)**.** Soit $(x_0, \dots, x_n)$ des réels 2 à 2 distincts.

1. Montrer que :

$$\exists!(L_0, \dots, L_n) \in \mathbb{R}_n[X]^{n+1}, \quad \forall i, j \in [\![0, n]\!], \quad L_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

2. Soit $(y_0, \dots, y_n)$ des réels, montrer que :

$$\exists! P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \forall i \in [\![0, n]\!], \quad P(x_i) = y_i.$$

3. Donner le reste de la division euclidienne d'un polynôme P par $\prod_{k=0}^n (X - x_k)$.

11 Espaces vectoriels

Exercice 181. Montrer que la famille $(\ln(p))_{p\ premier}$ est libre sur le corps $\mathbb{Q}$.

Exercice 182. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E, on considère $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ et on pose $u = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $(e_1 + u, \dots, e_n + u)$ soit liée.

Exercice 183. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cup G = E$, montrer que $F = E$ ou $G = E$.

Exercice 184. Soit A un polynôme de degré p. Pour $n \geq p$, on pose

$$F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid A|P\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et en trouver un supplémentaire.

Exercice 185. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G des sous-espaces non-triviaux tels que $F \oplus G = E$. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de F et $a \in G$, on pose

$$F_a = \mathrm{Vect}(e_1 + a, \ldots, e_k + a).$$

Montrer que F_a est un supplémentaire de G, en déduire que G admet une infinité de supplémentaire.

Exercice 186. On définit $f_a : x \in \mathbb{R} \longmapsto |x - a|$. Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts, montrer que la famille $(f_{a_i})_{i \in [\![1,n]\!]}$ est libre.

Exercice 187 (Polynômes de Hilbert)**.** On pose $P_0 = 1$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P_k(X) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (X - i).$$

Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $P_k(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. En déduire l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Exercice 188. Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E non-inclus dans H, montrer que $\dim F \cap H = \dim F - 1$.

Exercice 189. Soit E l'ensemble des fonctions continues définies sur $[-1, 1]$ telles que leurs restrictions à $[-1, 0]$ et à $[0, 1]$ soient affines. Montrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 190. Soit E l'ensemble des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et

$$D = \{f - g \mid f, g \in E\}.$$

Montrer que D est un espace vectoriel.

Exercice 191. Soit F et G des sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cap G = F + G$, montrer que $F = G$.

Exercice 192. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces de même dimension. Montrer que F et G ont un supplémentaire commun.

Exercice 193. Montrer qu'en dimension finie, tout sous-espace vectoriel est l'intersection des hyperplans qui le contiennent.

Exercice 194. Montrer que toute matrice complexe admet un polynôme annulateur non-nul. En déduire que :

$$\forall A \in GL_n(\mathbb{R}),\ \exists P \in \mathbb{R}[X],\ A^{-1} = P(A).$$

Exercice 195. Soit $P_1, \ldots, P_4 \in \mathbb{R}_3[X]$.

1. On suppose que $P_i(0) = 1$, la famille $(P_1, \ldots, P_4)$ peut-elle être libre ?

2. Et si on suppose $P_i(1) = 0$?

Exercice 196. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer qu'on peut trouver une base de F composée de polynômes de même degré.
2. Montrer qu'on peut trouver une base de F composée de polynômes de degrés 2 à 2 distincts.

Exercice 197. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $H_1, \ldots, H_p$ des hyperplans de E, montrer que

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} H_i\right) \geq n - p.$$

Exercice 198. Montrer que tout sous-espace de dimension m d'un espace vectoriel de dimension n est intersection de $n - m$ hyperplans.

12 Applications linéaires

Exercice 199 (Crochet de Lie)**.** Soit E un espace vectoriel et f, g des endomorphismes de E, on définit leur commutateur par $[f, g] = fg - gf$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que $[f, g^{k+1}] = [f, g^k]g + g^k[f, g]$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$[f, g^n] = \sum_{k=0}^{n-1} g^{n-1-k}[f, g]g^k.$$

Exercice 200 (Base duale)**.** Soit E un espace vectoriel de base $(e_1, \ldots, e_n)$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on définit f_i par $f_i\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = x_i$, montrer que $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de $L(E, \mathbb{K})$.

Exercice 201. Soit E un espace vectoriel, déterminer les $f \in L(E)$ telles que pour tout $x \in E$, $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$. En déduire le centre de $L(E)$ définit par

$$Z(L(E)) = \{f \in L(E) \mid \forall g \in L(E),\ g \circ f = f \circ g\}.$$

Exercice 202. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ intersecte $GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 203. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$, montrer que

$$\dim\ker(f) \leq \dim\ker(f^2) \leq 2\dim\ker(f).$$

Exercice 204. Déterminer les $f \in L(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ telles que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(AB) = f(BA).$$

Exercice 205. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et D l'opérateur de dérivation. Existe-t-il $T \in L(E)$ telle que $T^2 = D$?

Exercice 206. Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, déterminer les formes linéaires sur E telles que

$$\forall f, g \in E,\ D(fg) = f(0)D(g) + g(0)D(f).$$

Exercice 207. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in L(E)$ nilpotente, montrer que $u^n = 0$.

Exercice 208. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u_1, \ldots, u_n \in L(E)$ nilpotentes commutant deux à deux, montrer que $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0$.

Exercice 209. Soit E un espace vectoriel et $f, g \in L(E)$ vérifiant $fg - gf = \mathrm{Id}$. Montrer que pour tout polynôme P on a $fP(g) - P(g)f = P'(g)$. Montrer que E est nécessairement de dimension infinie. Donner un exemple de triplet (E, f, g) vérifiant l'énoncé.

Exercice 210. Soit E un espace vectoriel et $u \in L(E)$ admettant un polynôme annulateur P tel que $P'(0) \neq 0$. Montrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{im}(u)$ sont en somme directe.

Exercice 211. Montrer que deux formes linéaires de mêmes noyaux sont colinéaires.

Exercice 212. Soient $a_0, \ldots, a_n$ des réels non-nuls deux à deux distincts. On définit F_j par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ F_j(P) = \int_0^{a_j} P.$$

Montrer que $(F_0, \ldots, F_n)$ est une base de $L(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

Exercice 213. Soit $f \in L(E, F)$ injective et $(x_1, \ldots, x_p)$ des vecteurs de E. Montrer que

$$\mathrm{rg}(f(x_1), \ldots, f(x_p)) = \mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p).$$

Exercice 214. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in L(E)$. Montrer que

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n \leq \mathrm{rg}(fg).$$

Exercice 215. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in L(E)$. Montrer que

$$\mathrm{rg}(f + g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g),$$

puis que

$$|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leq \mathrm{rg}(f - g).$$

Exercice 216. Pour u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :

1. $\ker(u) = \ker(u^2)$.
2. $\mathrm{im}(u) = \mathrm{im}(u^2)$.
3. $E = \ker(u) \oplus \mathrm{im}(u)$.

Exercice 217. Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $f \in L(E)$ telle que $f^2 - (\alpha+1)f + \alpha\mathrm{Id} = 0$, montrer que $\ker(f - \mathrm{Id}) \oplus \ker(f - \alpha\mathrm{Id}) = E$.

Exercice 218. Soit E un espace vectoriel et $u \in L(E)$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(u^k) = \ker(u^{k+1})$. Montrer que

$$\forall n \geq k,\ \ker(u^n) = \ker(u^k).$$

Exercice 219. Soit E un espace vectoriel. Trouver tous les couples (f, g) d'endomorphismes de E vérifiant

$$f \circ g = f \text{ et } g \circ f = g.$$

Exercice 220. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$ tel que

$$\forall x \in E,\ \exists p(x) \in \mathbb{N},\ f^{p(x)}(x) = 0.$$

Montrer que f est nilpotent. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 221. Montrer que $\ker(\mathrm{tr}) = \mathrm{Vect}\left(\{AB - BA \mid A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}\right)$.

Exercice 222. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $(x, y) \in E \times F$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour qu'il existe $f \in L(E, F)$ telles que $f(x) = y$.

Exercice 223. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un automorphisme de E tel que pour tout $x \in E$, l'ensemble

$$\left\{u^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\right\}$$

est fini. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u^N = \mathrm{Id}$.

Exercice 224. Soit $(x_0, \ldots, x_n)$ des réels 2 à 2 distincts, on considère

$$\phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto (P(x_0), \ldots, P(x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Montrer que ϕ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quel est le lien entre ϕ et les polynômes de Lagrange ? En déduire que les polynômes de Lagrange forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 225. Soient a, b des réels distincts. Montrer qu'il existe une unique application $\varphi \in L(\mathbb{R}[X])$ telle que $\varphi(1) = 1$, $\varphi(X) = X$ et

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad P(a) = P(b) = 0 \Longrightarrow \varphi(P) = 0.$$

Exercice 226. Soit E, F des espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in L(F, E)$, donner la dimension de

$$A = \{g \in L(E, F) \mid f \circ g \circ f = 0\}.$$

Exercice 227 (Décomposition nilespace et coeur)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$.

1. Montrer que la suite $(\ker(u^n))_{n\in\mathbb{N}}$ stationne.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $(\ker(u^n))_{n\geq p}$ est constante, montrer que $E = \ker(u^p) \oplus \mathrm{im}(u^p)$.
3. On pose $N = \ker(u^p)$ et $S = \mathrm{im}(u^p)$, montrer que N et S sont stables par u puis que $u_{|N}$ (resp. $u_{|S}$) est nilpotente (resp. un automorphisme).

13 Intégration et formules de Taylor

Exercice 228. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\frac{f(x)}{x^n} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Montrer que $f^{(n+1)}$ s'annule.

Exercice 229. Déterminer les fonctions f continues sur $[a, b]$ telles que

$$\int_a^b f = (b-a) \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Exercice 230. Soit f continue sur $[0, 1]$ telle que $\left(\int_0^1 f^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, montrer que f est constante égale à 1, -1 ou 0.

Exercice 231 (Un théorème de la moyenne)**.** Soient f, g continues sur $[a, b]$, avec f positive. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b fg = g(c) \int_a^b f.$$

Exercice 232. Montrer que pour tout $x \in]0, 1]$, $\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{2x}$. En déduire que si f est continue et vérifie $\int_0^1 f = \frac{\pi}{4}$, il existe $a \in]0, 1]$ tel que $\frac{1}{1+a} \leq f(a) \leq \frac{1}{2a}$.

Exercice 233. On définit l'ensemble

$$F = \left\{ f \in \mathcal{C}^1\left([0, 1], \mathbb{R}\right) \;\middle|\; f(0) = 0,\ f(1) = 1 \right\}.$$

Déterminer $\inf_{f \in F} \int_0^1 |f' - f|$.

Exercice 234. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \cos(x-y) f(y) \mathrm{d}y.$$

Déterminer la limite de g en 0. En supposant de plus que f converge vers ℓ en $+\infty$, déterminer la limite de g en $+\infty$.

Exercice 235. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue. Montrer que la suite $\left(\left(\int_0^1 f^n\right)^{\frac{1}{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\max_{[0,1]} f$.

Exercice 236. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$, montrer l'équivalence suivante :

$$\frac{f(x)}{x^n} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \iff \forall i \in [\![0, 1]\!],\ f^{(i)}(0) = 0.$$

Exercice 237 (Inégalité de Kolmogorov)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$, on note $M_0 = \sup_{\mathbb{R}} |f|$ et $M_2 = \sup_{\mathbb{R}} |f''|$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \neq 0,\ |2hf'(x) - (f(x+h) - f(x-h))| \leq M_2 h^2.$$

En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h > 0,\ |f'(x)| \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{M_0}{h}.$$

En déduire une majoration de $M_1 = \sup_{\mathbb{R}} |f'|$.

Exercice 238. Soit f continue telle que

$$\int_0^\pi f(t) \cos(t) \mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t) \sin(t) \mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que f s'annule en deux réels distincts de $[0, \pi]$.

Exercice 239. Soit f continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 f = 0$. On note M et m le maximum et le minimum de f sur $[0,1]$, montrer que

$$\int_0^1 f^2 \leq -mM.$$

Exercice 240. Soit f continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. A quelle condition sur f a-t-on $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$?

Exercice 241. Soit $g \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que $g(1) = g'(1) = 0$. Déterminer la limite de la suite $\left(n^2 \int_0^1 t^n g(t)\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 242. Soit f continue et positive sur $[0,1]$ telle que

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) \leq \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que f est nulle.

Exercice 243. Soit $f : [0,a[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que f et toutes ses dérivées soient positives sur $[0,a[$. Montrer que pour tout $r \in [0,a[$, la série de Taylor de f converge vers f sur $[0,r[$.

Exercice 244. Soient f continue sur $[0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \int_0^1 t^k f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros dans $]0,1[$.

Exercice 245. Soit P un polynôme réel de degré impair et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|.$$

Que dire de f ?

Exercice 246. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on ait

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{1+n^2}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer $f^{(k)}(0)$.

Exercice 247 (Irrationnalité de π)**.** On suppose qu'il existe $p,q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\pi = \frac{p}{q}$. On définit la suite $P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(p-qx)^n$. Montrer que pour tout k entier, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{p}{q})$ sont entiers. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{p}{q}} P_n(t)\sin(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Conclure.

14 Séries numériques I

Exercice 248 (Constante γ d'Euler)**.** On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et en déduire un équivalent de H_n.

Exercice 249. Soit $\sum u_n$ une série convergente où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, montrer que $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 250. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites positives telles que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, ontrer que $\sum \sqrt{a_n b_n}$ converge. En déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, alors on a :

$$\sum u_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum \sqrt{u_n u_{n+1}} \text{ converge.}$$

Que dire de la réciproque ?

Exercice 251 (Transformation d'Abel)**.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante convergeant vers 0 et $b_n = n(a_{n-1} - a_n)$. Montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ont même nature et que dans le cas de convergence, leurs sommes sont égales.

Exercice 252. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive, on définit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \sqrt{v_n^2 + u_n}\right)$. Montrer que :

$$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \iff \sum u_n \text{ converge.}$$

Exercice 253. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive, on définit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_0 > 0$ et $v_{n+1} = v_n + \frac{u_n}{v_n}$. Montrer que :

$$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \iff \sum u_n \text{ converge.}$$

Exercice 254. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et 1-périodique, on pose $u_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\sum u_n$ converge.

Exercice 255. Soit $s(n)$ le nombre de chiffres de n, la série $\sum \frac{s(n)}{n(n+1)}$ est-elle convergente ?

Exercice 256. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive et $v_n = \frac{a_n}{(1+a_0)\cdots(1+a_n)}$. Montrer que $\sum v_n$ converge et montrer que :

$$\sum a_n \text{ converge} \iff \sum_{k=0}^{\infty} v_k = 1.$$

Exercice 257. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n}$, la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Exercice 258 (Règle de d'Alembert)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive telle que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Déterminer la nature de $\sum u_n$ dans les cas $\ell < 1$ et $\ell > 1$. Montrer qu'on ne peut rien dire dans le cas $\ell = 1$.

Exercice 259 (Règle de Raabe-Duhamel)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donner la nature de $\sum u_n$ dans les cas $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$. Montrer qu'on ne peut rien dire dans le cas $\alpha = 1$.

Exercice 260. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive, montrer que $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.

Exercice 261. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum nu_n$ converge, montrer que $\sum u_n$ converge.

Exercice 262. Soit $\sum a_n$ une série complexe absolument convergente telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k = 0.$$

Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle.

Exercice 263 (Un théorème de Riemann)**.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe, montrer que :

$$\sum |a_n| \text{ converge } \iff \forall \text{ bijection } \sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \ \sum a_{\sigma(n)} \text{ converge.}$$

Exercice 264. Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists \text{ bijection } \sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{\infty} u_{\sigma(k)} = x.$$

15 Matrices et applications linéaires

Exercice 265. Soit $A = \left(\binom{i-1}{j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n+1}$ et $f \in L(\mathbb{R}_n[X])$ représenté par A dans la base canonique. Trouver l'inverse ainsi que les puissances de A. Soit $a(m,n)$ le nombre de surjections de $[\![1,m]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. Montrer que

$$n^m = \sum_{k=1}^{m} \binom{n}{k} a(m,k).$$

En déduire $a(m,n)$.

Exercice 266. Soit E de dimension finie n et $f \in L(E)$ telle que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E. En déduire le commutant de f, définit par

$$C(f) = \{g \in L(E) \mid gf = fg\}.$$

Exercice 267. Soient A et B des matrices carrées, montrer qu'il existe U et V des matrices carrées inversibles telles que

$$\mathrm{rg}(UA + BV) = \min(n, \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)).$$

Exercice 268. Soit H une matrice de rang 1. Montrer que

$$\exists U, V \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}), \ H = U\,{}^tV.$$

En déduire les puissances de H.

Exercice 269. Soient A, B des matrices carrées telles que $AB - BA = A$, déterminer $\mathrm{tr}(A^p)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 270. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $f \in L(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ définit par $f(M) = MA$. Déterminer $\mathrm{tr}(f)$.

Exercice 271. Soit A une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle, montrer que $A^n = 0$.

Exercice 272. Soit $A = (\sin(i+j))_{1\leq i,j\leq n}$, calculer le rang de A.

Exercice 273. Soit $f \in L(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ non constante telle que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ f(AB) = f(A)f(B).$$

Montrer que

$$f(A) = 0 \iff A \notin GL_n(\mathbb{K}).$$

Exercice 274. Soit $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, montrer que

$$\mathrm{rg}(M) = \inf\left\{k \in \mathbb{N} \mid \exists (A,B) \in \mathcal{M}_{nk}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{kp}(\mathbb{K}),\ M = AB\right\}.$$

Exercice 275. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sont de rang au plus r, où $r < n$. Montrer que $\dim(E) \leq n^2 - (n-r)^2$.

Exercice 276. Soit A une matrice carrée, montrer qu'il existe une matrice inversible M telle que AM soit un projecteur.

16 Déterminants

Exercice 277. Soit A une matrice carrée telle que chaque ligne et chaque colonne contienne un unique terme non-nul, montrer qu'elle est inversible.

Exercice 278. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA$, montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$. Montrer par un contre-exemple que l'hypothèse de commutation est essentielle.

Exercice 279. Soit $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ antisymétrique, calculer son déterminant.

Exercice 280. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq 1.$$

Montrer que $|\det(A)| \leq 1$.

Exercice 281. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\phi \in L(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ définie par $\phi(M) = AM$, calculer $\det(\phi)$.

Exercice 282. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(A+X) = \det(B+X).$$

Montrer que $A = B$.

Exercice 283 (Déterminant de Cauchy)**.** Soit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels tels que $a_i + b_j$ n'est jamais nul. Calculer $\det\left(\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}\right)$.

Exercice 284. Calculer $\det\left((|i-j|)_{1\leq i,j\leq n}\right)$.

Exercice 285. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $B = PAP^{-1}$. Montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $B = QAQ^{-1}$.

Exercice 286. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que B soit nilpotente et commute avec A, montrer que $\det(A + B) = \det(A)$.

Exercice 287. Soient a, b, c des réels tels que $a^2 > 4bc$, calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} a & c & & & \\ b & a & c & & \\ & b & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c \\ & & & b & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 288. Calculer le déterminant d'ordre $2n$ suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 289 (Déterminant circulant)**.** Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels, calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 290. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices avec $\mathrm{rg}(B) = 1$, montrer que l'application suivante est affine :

$$\lambda \in \mathbb{R} \longmapsto \det(A + \lambda B).$$

17 Espaces euclidiens et préhilbertiens

Exercice 291. On définit $B : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$B(P, Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)Q(n)}{n!}.$$

Montrer que B est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 292. Soit E un espace euclidien et $x, y \in E$, montrer que :

$$\|u\| + \|v\| \leq \sqrt{2} \max(\|u + v\|, \|u - v\|).$$

Exercice 293. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, montrer que

$$n \leq \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{2^p}} \leq n \left(\frac{n+1}{2} \right)^{\frac{1}{2^p}}.$$

Exercice 294. Montrer que $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis que $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$. Montrer que pour toute matrice A on a

$$|\operatorname{tr}(A)| \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}^2}.$$

Exercice 295. Soit E un espace euclidien et $x, y \in E$, montrer que

$$1 + \|x+y\|^2 \leq 2\left(1+\|y\|^2\right)\left(1+\|x\|^2\right).$$

Exercice 296. Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels, montrer que

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. Pour $n = 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 297 (Théorème de représentation de Riesz en dimension finie)**.** Soit E un espace euclidien, montrer que

$$\forall \varphi \in L(E, \mathbb{R}),\ \exists u \in E,\ \forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle u, x\rangle.$$

Exercice 298. Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, montrer que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}({}^tAA)$.

Exercice 299. Soit E euclidien, montrer que pour tout $x, y \in E$, on a l'équivalence

$$\langle x, y\rangle = 0 \iff \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|x + \lambda y\| \geq \|x\|.$$

Exercice 300. Soit E euclidien, $a \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, résoudre dans E l'équation

$$\langle a, x\rangle = \lambda.$$

Exercice 301. Soit E euclidien, soit $u \in L(E)$ tel que

$$\forall x, y \in E,\ \langle x, y\rangle = 0 \Longrightarrow \langle u(x), u(y)\rangle = 0.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$ pour tout $x \in E$.

Exercice 302 (Famille obtusangle)**.** Soit $n \geq 2$ et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille d'un espace préhilbertien tels que

$$\forall i \neq j,\ \langle x_i, x_j\rangle < 0.$$

Montrer que toute sous-famille de $(x_1, \dots, x_n)$ constituée de $n-1$ vecteurs est libre.

Exercice 303. Soit p un projecteur d'un espace euclidien E. Montrer l'équivalence entre :

1. p est un projecteur orthogonal.
2. $\forall u \in E,\ \|p(u)\| \leq \|u\|$.
3. $\forall x, y \in E,\ \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$.

Exercice 304. Soit E un espace euclidien et $f \in E^E$ telle que

$$\forall u, v \in E,\ \langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

Montrer que f est linéaire.

Exercice 305. Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel et F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales. Montrer que $\exp \notin F$ puis qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $\|f_n - \exp\| \longrightarrow 0$. En déduire que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal dans E.

Exercice 306. Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ injective, déterminer la nature de la série $\sum \frac{\varphi(n)}{n^2}$.

Exercice 307. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_a^b PQ$. Soit $(P_0,\dots,P_n)$ l'orthonormalisée de $(1,\dots,X^n)$. Donner le degré de P_k et montrer l'existence de trois suites telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_{n+1} = a_n X P_n + b_n P_n + c_n P_{n-1}.$$

Exercice 308. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_a^b PQ$. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes orthogonaux de degrés échelonnés. Montrer que P_n a n racines distinctes dans $]a,b[$.

Exercice 309 (Une inégalité de Hardy)**.** Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, pour $x \in]0,1]$ on pose $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f$ et $F(0) = 0$. Montrer que

$$\int_0^1 F^2(x)\mathrm{d}x \leq 4\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 310. Soient $a, c \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^n$, décrire géométriquement l'ensemble

$$E = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; a\|x\|^2 + \langle b, x\rangle + c = 0\right\}.$$

18 Probabilités I

Exercice 311. Soit X, Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}(Y^k).$$

Montrer que X et Y suivent la même loi.

Exercice 312. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, N]\!]$, montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(X > n).$$

Exercice 313 (Fonction caractéristique)**.** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_0,\dots,x_n\} \subset \mathbb{Z}$. On définit φ_X par

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \varphi_X(u) = \mathbb{E}\left(e^{iuX}\right).$$

Montrer que φ_X est $\mathcal{C}^\infty$ et calculer $\varphi^{(k)}(0)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\varphi_X = \varphi_Y \Longrightarrow X \sim Y.$$

Exercice 314. Soit X à valeur dans $[\![0, n]\!]$ telle que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \mathbb{P}(X = k) = \frac{a}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Trouver a et calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

Exercice 315. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et X, Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, montrer que

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)}.$$

Etudier le cas d'égalité.

Exercice 316. Soit A, B, C trois évènements de même probabilité p vérifiant $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$, montrer que $p \leq \frac{2}{3}$.

Exercice 317 (Loi faible des grands nombres)**.** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé de même espérance et de même variance, montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mathbb{E}(X_1)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(X_1)}{n\varepsilon^2}.$$

Exercice 318 (Polynômes de Bernstein)**.** Soit f une fonction continue définie sur $[0,1]$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $x \in [0,1]$, trouver la limite de

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right)\right)$$

quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 319 (Formule du crible de Poincaré)**.** Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ des évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, montrer que

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \mathbb{1} - \prod_{i=1}^{n} (\mathbb{1} - \mathbb{1}_{A_i}).$$

En déduire la formule du crible de Poincaré :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{S \subset [\![1,n]\!],\ S \neq \emptyset} (-1)^{\mathrm{Card}(S)-1}\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right).$$

Deuxième partie

Programme de PC*

19 Topologie et espaces vectoriels normés

Exercice 320 (L'ensemble de Cantor)**.** On dénote par T l'opérateur "enlever le tiers central" défini par $T([a,b]) = [a, a+\frac{b-a}{3}] \cup [b-\frac{b-a}{3}, b]$. On pose $K_0 = [0,1]$ et on définit une suite de parties de $\mathbb{R}$ par $K_{n+1} = T(K_n)$. On pose $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

1. Montrer que K est un compact d'intérieur vide de "longueur" nulle, en bijection avec $\mathbb{R}$.
2. Soit $h(x) = \frac{x}{3}$, montrer que l'on a
$$K = h(K) \cup \left(h(K) + \frac{2}{3}\right).$$

Exercice 321 (Densité dans $\mathbb{R}$)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0, montrer

$$D = \{pu_n \mid (p,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 322. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles divergeant vers $+\infty$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n) = 0$. Montrer que $\{u_n - v_p \mid n, p \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 323. Soit E un espace vectoriel normé, montrer que tout fermé est une intersection dénombrable d'ouverts.

Exercice 324 (Caractérisation des ouverts de $\mathbb{R}$)**.** Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Exercice 325. Soit $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\right\}$ et $B = \{0\}\times\mathbb{R}$. Montrer que A et B sont fermés dans $\mathbb{R}^2$ mais que $A+B$ ne l'est pas.

Exercice 326. Soit E un espace vectoriel normé et K, L deux compacts de E, montrer que $K+L$ est compact.

Exercice 327. Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace stricte de E, montrer que F est d'intérieur vide.

Exercice 328.
1. Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace de E de dimension finie, montrer que F est fermé.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(M) = \exp(M)$.

Exercice 329 (Théorème de compacité de Riesz)**.** Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que : $\forall x \in E$, $\exists y \in F$, $d(x,F) = \|x-y\|$.
2. Si $F \neq E$, montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $d(u,F) = \|u\| = 1$.
3. Montrer finalement que si $B(0,1)$ est compacte, alors E est de dimension finie.

Exercice 330. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, constuire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que si $p \neq q$, alors $\|f_p - f_q\|_\infty = 1$ et telle que $\|f_n\|_\infty = 1$. En déduire que $B_E(0,1)$ n'est pas compacte.

Exercice 331. On norme $E = \mathbb{R}[X]$ par les applications suivantes :

$$N_1(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|, \qquad N_2(P) = \sup_{t\in[1,2]} |P(t)|.$$

L'ensemble $U = \{P \in E \mid P(0) \neq 0\}$ est-il ouvert dans (E, N_i) pour $i = 1, 2$?

Exercice 332. Soit E un espace vectoriel normé et A, B des parties de E. Comparer les ensembles suivants :
— $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.
— $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Exercice 333. Soit E un espace vectoriel normé et $u \in L(E)$. Montrer que u est continue si et seulement si $\{x \in E \mid \|u(x)\|_E = 1\}$ est fermé dans E.

Exercice 334. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et V un sous-espace vectoriel de E, on considère une forme linéaire continue $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique application $g : \overline{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
— $g_{|V} = f$.
— g est linéaire.
— g est continue et $\|f\|_V = \|g\|_{\overline{V}}$.

Exercice 335. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, f une forme linéaire non-nulle sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer l'équivalence

$$f^{-1}(\alpha) \quad \text{est fermé} \iff f \quad \text{est continue.}$$

Exercice 336. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on pose $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Montrer les implications suivantes :
— f continue $\Longrightarrow \Gamma$ fermé dans $\mathbb{R}^2$.
— f bornée et Γ fermé dans $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow f$ continue.

Exercice 337. Soit un espace vectoriel normé de dimension finie et K un compact de E d'intérieur non-vide. Montrer que

$$\{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(K) \subset K\}$$

est un compact de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 338. Montrer qu'une suite à valeurs dans un compact converge si et seulement si elle a au plus une valeur d'adhérence.

Exercice 339. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie, on définit $T \in \mathcal{L}(E)$ par

$$\forall f \in E, \forall x \in [0,1], Tf(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

Est-ce que T est continue, injective, surjective ?

Exercice 340. Soit $E = \mathbb{R}[X]$, pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ on définit les applications suivantes :

$$N_1(P) = \sup_{0\leq k\leq n} |a_k|, \qquad N_2(P) = \sum_{k=0}^n |a_k|, \qquad N_3(P) = \int_0^1 |P(t)|\mathrm{d}t.$$

Montrer que ce sont des normes sur E et les comparer.

Exercice 341. Existe-t-il une norme $\|.\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \forall P \in GL_n(\mathbb{C}),\ \|A\| = \|PAP^{-1}\| \ ?$$

Exercice 342. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme. Soit $T \in L(E)$ telle que $f \geq 0$ implique $T(f) \geq 0$, montrer que T est continue.

Exercice 343. Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ N(x, y) = \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|.$$

est une norme. Représenter la boule unité pour cette norme.

Exercice 344. On norme l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites réelles bornées par la norme infinie. Pour $u \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, on définit la suite Δu par $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$. Déterminer la distance de la suite constante égale à 1 au sous-espace $\{\Delta u \mid u \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})\}$.

Exercice 345. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour que l'application suivante définisse une norme :

$$N_a : u \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |u_n|.$$

Comparer N_a et la norme infinie.

Exercice 346. On note $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \;\middle|\; f(0) = 0 \right\}$, montrer que les deux applications suivantes sont des normes équivalentes sur E :

$$N_1(f) = \|f'\|_\infty, \qquad N_2(f) = \|f + f'\|_\infty.$$

Exercice 347. Soit $\varphi \in E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, on définit $N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty$ pour $f \in E$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur φ pour que N_φ norme E puis pour qu'elle soit équivalente à $\|.\|_\infty$.

Exercice 348 (Fonctions minimales)**.** Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une application $f : E \longrightarrow E$ continue est minimale si les seuls fermés qu'elle stabilise sont E et $\emptyset$.

1. Montrer l'équivalence suivante :

$$f \text{ est minimale} \iff \forall x \in E,\ \overline{\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}} = E.$$

2. Montrer que s'il existe $x \in E$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $f^m(x) = x$, alors f n'est pas minimale.
3. Montrer que il n'existe pas de fonctions minimales si $E = \mathbb{R}$.

Exercice 349. Soient E un espace vectoriel et $f, g \in L(E)$ telle que $fg - gf = \mathrm{Id}$.

1. Montrer que E est de dimension infinie.
2. Montrer qu'il n'existe pas de norme sur E qui rende f et g continues.
3. Donner un exemple de triplet (E, f, g) vérifiant cette condition.

20 Séries numériques II

Exercice 350 (Test de condensation)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante convergeant vers 0 et $p \geq 2$. Montrer que :

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum p^n u_{p^n} \text{ converge.}$$

Exercice 351.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suie décroissante telle que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que $u_n = o(\frac{1}{n})$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante tendant vers 0. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n-1})$ sont de même nature et que leur sommes sont égales dans le cas de convergence.

Exercice 352 (Critère de Cauchy)**.** Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive telle que $\sum u_n$ soit convergente, montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq q \geq N, |u_q + \cdots + u_p| \leq \varepsilon.$$

Exercice 353. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$ si la série converge. Si $\sum u_n$ diverge, montrer l'équivalence :

$$\sum \frac{u_n}{S_n^a} \quad \text{converge} \iff a > 1.$$

Si $\sum u_n$ converge, montrer l'équivalence :

$$\sum \frac{u_n}{R_n^a} \quad \text{converge} \iff a < 1.$$

Exercice 354 (Sommation des relations de comparaison)**.** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites positives et équivalentes.

1. Si les séries convergences, montrer que les restes sont équivalents.
2. Si les séries divergent, montrer que les sommes partielles sont équivalentes.

Montrer que ces résultats sont vrais pour les autres relations de comparaison.

Exercice 355. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive, on note S_n les sommes partielles et R_n les restes si la série converge. Montrer les implications suivantes :

1. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow +\infty \Longrightarrow S_n \sim u_n$.
2. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell > 1 \Longrightarrow S_n \sim \frac{u_{n+1}}{\ell - 1}$.
3. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell \in [0, 1[\Longrightarrow R_n \sim \frac{u_n}{1-\ell}$.

Exercice 356. On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_1 > 0$ et $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{S_n}$, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_n$. Donner un équivalent de x_n.

Exercice 357. (Fonction ζ de Riemann I) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

1. Pour quelles valeurs de α la fonction ζ est-elle définie ?
2. Soit $\alpha > 1$, trouver un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Exercice 358. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite croissante des nombres premiers, montrez que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ est divergente.

Exercice 359. Pour p =2 ou 3, déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in [0,1], \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{p^n}.$$

Exercice 360. Soit $\sum a_n$ une série convergente, montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive divergeant vers $+\infty$ telle que $\sum a_n b_n$ converge.
Soit $\sum a_n$ une série divergente, montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive convergeant vers 0 telle que $\sum a_n b_n$ diverge.

Exercice 361. Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}}$.

Exercice 362. Existe-t-il $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ converge et $\sum u_n^3$ diverge ?

Exercice 363. Donner la nature de $\sum e^{-(\ln n)^{\alpha}}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 364. Soit $A \subset \mathbb{N}^*$ telle que la série $\sum_{a\in A} \frac{1}{a}$ converge. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|A \cap [\![1, n]\!]|}{n} = 0.$$

La réciproque est-elle vraie ?

21 Suites et séries de fonctions

Exercice 365. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit f_n sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Etudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$.

Exercice 366. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée telle que $f(0) = 0$. On définit une suite de fonctions sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{f(x)}{1 + n^2 x^2}.$$

Etudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 367. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f'' est bornée. On définit une suite de fonctions sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$, étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 368. On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$ par $f_0 = 1$ et

$$\forall x \in [0, 1],\ f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{f_n(t)} \mathrm{d}t.$$

Etudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$.

Exercice 369. Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + x}.$$

Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$. En simplifiant $S(x+1) + S(x)$, donner un équivalent de S en 0 et en $+\infty$.

Exercice 370. Etudier la convergence sur $\mathbb{R}_+$ de la série de fonctions $\sum u_n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ u_n(x) = \frac{\mathbb{1}_{[n,n+1[}(x)}{n+1}.$$

Exercice 371. On considère les fonctions $u_n(x) = a_n x^n(1-x)$ définies sur $[0,1]$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive et décroissante. Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement. Montrer les deux équivalences suivantes :

1. la série $\sum u_n$ converge uniformément ssi la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. la série $\sum u_n$ converge normalement ssi la série $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

Exercice 372 (Fonctions quasi-additives)**.** Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\exists a > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ |f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq a.$$

Montrer que $\left(\frac{f(2^n x)}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g linéaire. Montrer que $f - g$ est bornée.

Exercice 373. On définit la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a,b]$ par $f_0 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et pour $x \in [a,b]$

$$f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n.$$

Etudier la série $\sum f_n$.

Exercice 374. Soit $f_0 = 0$, on définit sur $\mathbb{R}_+$ une suite de fonctions par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + f_n(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \geq 0$ on a

$$0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f. Démontrer que f est $\mathcal{C}^1$ et trouver une équation différentielle qu'elle vérifie.

Exercice 375. On définit la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = (-1)^n \underbrace{\sin(\sin(\cdots(\sin(x))\cdots))}_{n \text{ fois}}.$$

Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement, uniformément sur $\mathbb{R}$, mais pas normalement.

Exercice 376 (Théorèmes de Dini)**.** Soit $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f continue.

1. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f_{n+1} \leq f_n$, montrer que la convergence est uniforme.
2. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est croissante, montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 377. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a,b]$ K-lipschitziennes pour $K > 0$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 378 (Fonction du blanc-manger)**.** Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $s(x) = d(x, \mathbb{Z})$ et

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s(2^n x)}{2^n}.$$

Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$p_n = \max\left\{p \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \frac{p}{2^n} \leq x\right\}.$$

On note $a_n = \frac{p_n}{2^n}$ et $b_n = \frac{p_n+1}{2^n}$, en étudiant $\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$, montrer que f n'est pas dérivable en x.

Exercice 379 (L'escalier du diable)**.** Soit $f_0(x) = x$ définit sur $[0,1]$, f_1 est la fonction affine par morceaux qui vaut $\frac{1}{2}$ sur $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. On passe de même de f_n à f_{n+1}, en remplaçant f_n, sur chaque intervalle $[u,v]$ où elle n'est pas constante, par la fonction affine par morceaux qui vaut $\frac{f_n(u)+f_n(v)}{2}$ sur le tiers central de $[u,v]$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f continue et dérivable en x si et seulement si x n'appartient pas à l'ensemble de Cantor.

Exercice 380 (Fonction ζ de Riemann II)**.** On pose $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Déterminer les ensembles de définition de ζ et de f. Montrer que ces deux fonctions sont continues.
2. Déterminer un équivalent de $\zeta(x)$ en $+\infty$.
3. Exprimer ζ en fonction de f, en déduire un équivalent de $\zeta(x)$ en 1^+.

Exercice 381.

1. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynôme approchant uniformément une fonction f continue non-polynomiale sur un intervalle borné $I \subset \mathbb{R}$, montrer que $(\deg(P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
2. Montrer que toute limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes est un polynôme.

Exercice 382. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que f est nulle.

Exercice 383 (Théorème d'approximation de Weierstrass I)**.** Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $x \in [0,1]$, on note S_n une variable aléatoire une loi binomiale de paramètre (n,x), et on note $P_n = \mathbb{E}(f(\frac{S_n}{n}))$. Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et en déduire le théorème d'approximation de Weierstrass.

Exercice 384 (Théorème d'approximation de Weierstrass II)**.** On pose $u_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t$. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Sur $]-1,1[$ on définit φ_n et Φ_n par

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{u_n}\int_0^x \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t \qquad \Phi_n(x) = \int_0^x \varphi_n.$$

Etudier la convergence des suites $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 385 (Théorème d'approximation de Weierstrass III)**.** On pose $u_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n \mathrm{d}t$ et $\varphi_n(x) = \frac{1}{u_n}(1-x^2)^n$ pour $x \in [-1,1]$. Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on pose pour $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x-t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[\alpha, 1]$ pour $\alpha \in]0,1]$. Montrer que f_n est polynomiale sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. En déduire le théorème d'approximation de Weierstrass.

Exercice 386 (Théorème d'approximation de Weierstrass IV)**.** Sur $[0,1]$ on définit P_n par $P_0 = 0$ et

$$\forall x \in [0,1],\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right).$$

Etudier la convergence de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 387 (Théorème d'approximation de Weierstrass V)**.** Pour $k \leq n$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $B_{n,k}(x) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$. Soient $\alpha > 0$ et $x \in [0,1]$, on pose $A = \left\{k \in [\![0,n]\!] \mid |\frac{k}{n} - x| \geq \alpha\right\}$, montrer que

$$\sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, on pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$, montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

Exercice 388. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\|f - P_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad \|f' - P_n'\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 389 (Interpolation et approximation uniforme)**.** Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts inclus dans $[a,b]$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un polynôme P tel que $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$ et

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ P(x_k) = f(x_k).$$

Exercice 390 (Théorème de Chudnovski)**.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varphi_n = \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n \text{ fois}}$ où $\varphi(x) = 2x(1-x)$. Etudier la convergence de la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]0,1[$.

Soit I un segment de $]0,1[$ et f une fonction continue sur I, montrer que f est limite uniforme d'une suite de polynômes à coefficients entiers.

22 Intégrales impropres

Exercice 391. Donner un exemple de fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ qui n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 392. Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, a-t-on nécessairement $xf(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$? Montrer qu'il existe une suite $x_n \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ telle que $x_n f(x_n) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 393. Donner une condition sur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^a - x^a}{x^b} \mathrm{d}x$$

converge.

Exercice 394. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x.$$

Exercice 395. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \mathrm{d}x.$$

Exercice 396. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}_+$, montrer que

$$\frac{1}{x} \int_0^x t f(t) \mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 397. Soient $0 < a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \mathrm{d}x,$$

dans les trois cas suivants :

1. l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t$ existe.
2. la fonction f est T-périodique pour $T > 0$.
3. f converge en $+\infty$ vers une limite finie.

Exercice 398. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ telle que f' soit bornée et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ existe. Montrer que

$$f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donner un contre-exemple dans le cas où f' n'est pas bornée.

Exercice 399. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $x f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 400. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1 + t^4)^n} \mathrm{d}t.$$

Trouver une relation entre I_n et I_{n+1}. Donner un équivalent de I_n.

Exercice 401. Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que u et u' soient de carré intégrable. Montrer que $u(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$u^2(x) \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u'^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 402. Soit f continue et strictement positive telle que

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0,1[.$$

Etudier la nature de $\int_0^{+\infty} f$.

Exercice 403. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue décroissante de limite nulle en $+\infty$, montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 404 (Intégrale de Dirichlet)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\mathrm{d}t, \qquad v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et que $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 405. Trouver un équivalent en $+\infty$ de la fonction

$$f(\lambda) = \int_0^1 e^{i\lambda x^2}\mathrm{d}x.$$

Exercice 406. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ décroissante de limite nulle en $+\infty$ et $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que $x \longmapsto \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ soit bornée. Montrer que l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} g(t)f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 407. Soit $f \in \mathcal{C}^1([1,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que f'^2 soit intégrable sur $[1,+\infty[$. Montrer que $x \longmapsto \frac{f(x)^2}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Exercice 408. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = B$. Soit $x > 0$, déterminer

$$\lim_{a,b\to+\infty} \int_{-a}^{b} (f(t+x) - f(t))\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 409. Donner un équivalent de $e^{-n^2}\int_0^n e^{t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 410 (Inégalités de Hölder)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Soit $0 < p, q < +\infty$ tels que $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Pour tous réels $u, v \geq 0$, montrer que l'on a
$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$
2. Soient $f \in L^p(I)$ et $g \in L^q(I)$, montrer que $fg \in L^1(I)$ et
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \times \|g\|_q.$$

3. Plus généralement, si $0 < p, q < +\infty$, on définit $r > 0$ par $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Soient $f \in L^p(I)$ et $g \in L^q(I)$, montrer que $fg \in L^r(I)$ et

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \times \|g\|_q.$$

Exercice 411 (Inégalité de Minkowski)**.** Soit $p \in [1, +\infty[$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $\|.\|_p$ définie par

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

est une norme sur $L^p(I)$.

23 Intégrales à paramètres

Exercice 412. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\mathrm{d}x.$$

Exercice 413 (Intégrale de Gauss)**.** On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ les fonctions suivantes :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t, \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Montrer que $f^2 + g$ est constante, en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 414 (Intégrale de Fresnel)**.** Montrer que la fonction suivante est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(u^2+i)x^2}}{u^2+i}\mathrm{d}u.$$

Montrer que f est de limite nulle en $+\infty$. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1-i}{2}.$$

Exercice 415. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}\mathrm{d}t$. Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

Exercice 416. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n} = \int_0^1 t^{-t}\mathrm{d}t$.

Exercice 417. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suité réelle bornée, calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-2t}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \frac{t^k}{k!}\right)\mathrm{d}t.$$

Exercice 418. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable ainsi que sa dérivée, on pose

$$f_n(x) = \int_0^{+\infty} n\cos(t)\sin^n(t)f(xt)\mathrm{d}t.$$

Etudier la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 419. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, on considère $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions continues. Montrer que la fonction suivante est continue sur I :

$$g : x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 420. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $g : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ peut se prolonger en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer ses dérivées en 0.

Exercice 421. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\mathrm{d}t.$$

Exercice 422. Donner un équivalent de $\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}\mathrm{d}x$.

Exercice 423. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(1) \neq 0$, donner un équivalent de $\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 424. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue, déterminer la limite quand α tend vers 0 et $+\infty$ de

$$F(\alpha) = \left(\int_0^1 f^\alpha(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Exercice 425. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Etudier

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{nf(x)}{1 + n^2x^2}\mathrm{d}x.$$

Exercice 426. Pour $x \in [0,1[$, on pose

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}.$$

Donner des équivalents de $f(x)$ en 0 et en 1.

24 Réduction des endomorphismes

Exercice 427. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, on considère l'endomorphisme T défini par $(Tu)_n = \sum_{k=1}^n ku_k$. Trouver les éléments propres de T et si u est un vecteur propre, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 428. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, on considère $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ défini par $\varphi(u) = u \circ f$ et $\psi(u) = f \circ u$. Montrer que φ, ψ et $\varphi - \psi$ sont diagonalisables.

Exercice 429. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables, montrer que :

$$AB = BA \iff A \text{ et } B \text{ sont codiagonalisables.}$$

Exercice 430. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u_1, \ldots, u_p$ ($p \geq 2$) des endomorphismes de E vérifiant :

$$\forall k,\ u_k^2 = -\mathrm{Id}, \quad \forall k \neq \ell,\ u_k \circ u_\ell = -u_\ell \circ u_k.$$

Montrer que les u_k sont des automorphismes diagonalisables, donner leur spectre et les ordres de multiplicité des valeurs propres. Calculer finalement $\det(u_k)$.

Exercice 431. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, montrer que A est semblable à $-A$ si et seulement si $\mathrm{tr}(A) = \det(A) = 0$.

Exercice 432. Soit M une matrice de trace nulle, montrer que M est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 433. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^2 = 0$ et de rang $r > 0$, montrer que A est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 434. Soit $C = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $M = C^T C$. Donner le rang de M et son polynôme caractéristique, est-elle diagonalisable ?

Exercice 435. Soit $u \in L(E)$ un endomorphisme de rang 1 d'un espace vectoriel de dimension finie, montrer l'équivalence suivante :

$$u \text{ n'est pas diagonalisable} \iff \mathrm{im}(u) \subset \ker(u).$$

Exercice 436. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ non-constante telle que $f(AB) = f(A)f(B)$ pour toutes matrices A et B. Montrer que

$$GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid f(A) \neq 0\}.$$

Exercice 437. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet un polynôme annulateur.

Exercice 438. Sur $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$, on considère l'opérateur T défini par

$$\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ Tf(x) = f(x) + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

L'opérateur T est-il un automorphisme de E ? Admet-il un sous-espace stable de dimension finie ?

Exercice 439. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que

$$fg - gf = af + bg.$$

Montrer que f et g ont un vecteur propre en commun.

Exercice 440. Soit $E = \left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+) \;\middle|\; f(0) = 0\right\}$, montrer que l'application suivante est un endomorphisme de E :

$$T : f \in E \longmapsto \left(Tf : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \int_0^x \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right).$$

Trouver ses valeurs propres.

Exercice 441. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{1\} \iff A - \mathrm{I}_n \text{ est nilpotente.}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A - \mathrm{I}_n$ soit nilpotente, montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$ et $\mathrm{Sp}(B) = \{1\}$.

Exercice 442. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}(A) = 0$, $\mathrm{rg}(A) = 2$ et $A^n \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 443 (Décomposition de Dunford)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer qu'il existe une matrice D diagonalisable et N nilpotente commutant telle que $A = D + N$. En déduire une CNS pour que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 444. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, montrer que $\det(N + I_n) = 1$. Soit A commutant avec N, montrer que $\chi_A = \chi_{A+N}$.

Exercice 445. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré pair, l'application $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto P(M)$ est-elle surjective ? Et si on remplace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 446. Soient A, B deux matrices telles que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$. Montrer $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C})$ et que $f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longmapsto AX - XB$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 447. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe un plan stable par A.

Exercice 448. Soit D l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{Vect}(D)$. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inclus dans D, montrer que $\dim(V) \leq \frac{n(n+1)}{2}$. Donner un exemple pour le cas d'égalité.

Exercice 449 (Topologie des classes de similitude)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $S(A)$ sa classe de similitude, c'est-à-dire l'ensemble $\left\{PAP^{-1} \;\middle|\; P \in GL_n(\mathbb{C})\right\}$.

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in S(A)$ triangulaire supérieure telle que :
$$\forall\ 1 \leq i < j \leq n, |b_{ij}| \leq \varepsilon.$$
2. En déduire les caractérisations suivantes :
$$A \text{ est nilpotente} \iff 0 \in \overline{S(A)}.$$
$$A \text{ est diagonalisable} \iff S(A) \text{ est fermée.}$$

Exercice 450. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{tr}(A^k) = 0$, montrer que A est nilpotente.

25 Endomorphismes des espaces euclidiens

Exercice 451. Soit E euclidien et u un endomorphisme symétrique de E, on pose $f(x) = \|u(x)\|^2 - \langle u(x), x\rangle^2$.

1. La fonction f est-elle minorée sur E ?
2. Montrer que f est majorée sur E si et seulement si toutes ses valeurs propres ont le même signe. Calculer alors son maximum.

Exercice 452 (Polynômes de Legendre)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$L_n = \frac{1}{2^n n!}[(X^2-1)^n]^{(n)}.$$

On définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ par $\phi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'$.

1. En trouvant une équation différentielle vérifiée par L_n, montrer que $\phi(L_n) = n(n+1)L_n$. En déduire que ϕ est diagonalisable.
2. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} PQ$. Montrer que ϕ est symétrique, en déduire que les polynômes de Legendre forment une famille orthogonale. Calculer la norme de L_n pour ce produit scalaire, dans la suite on note $P_n = \frac{L_n}{\|L_n\|}$.
3. On munit $\mathcal{C}^0([-1,1])$ du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_I fg$. Pour $f \in \mathcal{C}^0([-1,1])$ on note $c_n(f) = \langle f, P_n\rangle$. Calculer $d(f, \mathbb{R}_n[X])$.

Pour f lipschitzienne sur $[-1,1]$ on peut montrer l'équivalence suivante :

$$f \in \mathcal{C}^\infty([-1,1]) \iff \forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{+\infty} n^k d_n(f) < +\infty.$$

Exercice 453. Soit E euclidien et $(y_j)_{j\in J}$ une famille finie de E telle qu'il existe $A, B > 0$ telles que

$$\forall x \in E,\ A\|x\|^2 \leq \sum_{j\in J}\langle x, y_j\rangle \leq B\|x\|^2.$$

1. Montrer que la famille $(y_j)_{j\in J}$ est génératrice.
2. On suppose $A = B = 1$ et $\|y_j\| = 1$ pour tout $j \in J$, montrer que $(y_j)_{j\in J}$ est une base orthonormée.
3. On suppose que $A = B$, montrer que pour tout $x \in E$ on a $x = \frac{1}{A}\sum_{j\in J}\langle x, y_j\rangle y_j$.

Exercice 454. Soit u une isométrie de E euclidien. Montrer que $E = \ker(u - \mathrm{Id}_E) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{im}(u - \mathrm{Id}_E)$. On pose :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$

Soit $x \in E$, montrer que $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 455 (Matrices de Gram I)**.** Pour toute famille de vecteurs $u = (u_1, \ldots, u_p)$ de E un espace préhilbertien, on note :

$$\mathrm{Gram}(u) = ((u_i|u_j))_{1\leq i,j\leq p}.$$

1. Montrer que $\mathrm{Gram}(u)$ est symétrique positive de même rang que $(u_1, \ldots, u_p)$.
2. Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe une famille $u = (u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que $M = \mathrm{Gram}(u)$.

Exercice 456 (Matrices de Gram II)**.** Soit $m \geq 2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ existe-t-il une famille $(x_1, \ldots, x_m)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\|x_i\| = 1$ et $(x_i|x_j) = \lambda$ si $i \neq j$?

Exercice 457 (Matrices de Gram III)**.** Soit E euclidien et $u = (u_1, \dots, u_p)$ et $v = (v_1, \dots, v_p)$ deux familles de E, montrer que :

$$\mathrm{Gram}(u) = \mathrm{Gram}(v) \iff \exists f \in \mathcal{O}(E),\ \forall k \in [\![1, p]\!],\ f(u_k) = v_k.$$

Exercice 458. Soit p une projection de E euclidien. Montrer que p est orthogonale si et seulement si p est symétrique.

Exercice 459. Soient E euclidien, $a \in E$ unitaire et $k \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$. On définit $f \in L(E)$ par $f(x) = x + k(x|a)a$.

1. Montrer que f est un automorphisme symétrique et trouver ses éléments propres.
2. Déterminer k pour que $f \in \mathcal{O}(E)$ et reconnaitre alors f.

Exercice 460. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on pose $B = A^3 + A + \mathrm{I}_n$, montrer que A est un polynôme en B.

Exercice 461 (Racine carrée dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$)**.** Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une unique $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
2. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $B = P(A)$.

Exercice 462. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telle que $A = {}^tTT$.

Exercice 463. 1. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact non convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $S\mathcal{O}(2)$ est connexe par arcs.

Exercice 464 (Décomposition polaire)**.** Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) &\longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) &\longmapsto OS \end{aligned}$$

est bijective.

Exercice 465. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, montrer que :

$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \forall B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(AB) \geq 0.$$

Exercice 466. Soit E euclidien et $f \in \mathcal{O}(E)$, montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes : :

— $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$.
— $\forall x \in e, \langle f(x), x\rangle = 0$.
— $\forall x, y \in E, \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.

Exercice 467. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue, pour $i, j \in [\![1, n]\!]$ on pose $a_{ij} = \int_0^1 x^{i+j-2} f(x)\mathrm{d}x$. Montrer que $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et montrer que :

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right) \geq \left(\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right).$$

Exercice 468. Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, montrer que $\det(\mathrm{I}_n + M)^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \det(M)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 469. Soient $(A, S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, peuvent-elles être semblables ?

Exercice 470 (Théorème de Courant-Fischer)**.** Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1 \geq \dots \lambda_n$ ses valeurs propres. Soit G_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^n$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, montrer que

$$\lambda_k = \max_{V\in G_k}\left(\min_{x\in V\cap B(0,1)} \langle x, Ax\rangle\right) = \min_{V\in G_{n-k+1}}\left(\max_{x\in V\cap B(0,1)} \langle x, Ax\rangle\right).$$

26 Probabilités II

Exercice 471. Soit Soient X, Y deux variables alétoires définies sur le même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{(i+j)e^{i+j-1}}{2e^{2e} i! j!}.$$

Donner les lois marginales de X et Y, sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathbb{E}(2^{X+Y})$.

Exercice 472. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé, telles que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Y suit une loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$, calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 473. Soient X, Y deux variables alétoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ à valeurs dans une partie dénombrable de $[0, 1]$. Montrer que :

$$X \sim Y \iff \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X^n) = \mathbb{E}(Y^n).$$

Exercice 474 (Lemme de Borel-Cantelli)**.** Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de $\mathcal{T}$.

1. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k\right) = 0$.
2. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge et que les évènements A_n sont indépendants, montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k\right) = 1$.

Exercice 475 (Marche aléatoire symétrique dans $\mathbb{Z}$)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi $B\left(\frac{1}{2}\right)$ indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k$, où $S_0 = 0$ presque sûrement.

1. Soient $n \geq 1$ et $k \in [\![-n, n]\!]$, montrer que $\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n+k}{2}}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ infiniment souvent}) = 1$.

Exercice 476 (Marche aléatoire symétrique dans $\mathbb{Z}^2$)**.**

1. Montrer $\mathbb{P}(N \geq k) = \mathbb{P}(N \geq 1)^k$ et en déduire que :

$$\sum \mathbb{P}(N \geq k) \text{ diverge} \Longrightarrow \mathbb{P}(N = +\infty) = 1.$$

2. En utilisant l'identité

$$\sum_{i+j=k} \binom{m}{i}\binom{n}{j} = \binom{m+n}{k},$$

calculer $\mathbb{P}(Z_n = (0, 0))$ et en déduire la nature de $\sum \mathbb{P}(Z_n = (0, 0))$.

3. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $N_p = \mathbb{1}_{\{Z_p=(0,0)\}}$, montrer que $\lim_{p\to+\infty} \mathbb{E}(N_0 + \cdots + N_p) = +\infty$.
4. Montrer que $\mathbb{P}(N = +\infty) = 1$.

Exercice 477. Soit $\mathfrak{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour $s > 1$, on pose :

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1}^{+\infty} n^{-s}.$$

Sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$, on définit la probabilité $\mathbb{P}$ par $\mathbb{P}(n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}$.

1. Montrer que les évènements $(p\mathbb{N}^*)_{p\in\mathfrak{P}}$ sont indépendants.
2. Montrer que $\zeta(s) = \prod_{p\in\mathfrak{P}}(1-p^{-s})^{-1}$.
3. En déduire que $\sum_{p\in\mathfrak{P}} \frac{1}{p}$ diverge.
4. En déduire qu'il n'existe pas de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que $\mathbb{P}(k\mathbb{N}^*) = \frac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 478 (Formule de Wald)**.** Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$, et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des précédentes. Pour $\omega \in \Omega$, on pose $S(\omega) = \sum_{k=0}^{T(\omega)} X_k(\omega)$.

1. Montrer que $G_S = G_T \circ G_{X_0}$.
2. On suppose que X_0 et T admettent une espérance, montrer que S admet une espérance et que $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X_0)$.

Exercice 479 (Marche aléatoire symétrique dans $\mathbb{Z}$ II)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi $B\left(\frac{1}{2}\right)$ indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k$, où $S_0 = 0$ presque sûrement.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right)$ et montrer que
$$\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) \leq \exp\left(\frac{nt^2}{2}\right).$$
2. Montrer que, si $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathbb{P}(S_n \geq n\lambda) \leq \exp\left(-\frac{\lambda^2 n}{2}\right).$$

Exercice 480 (Théorème de Beppo Levi)**.** Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

1. Soit X une variable aléatoire discrète positive, montrer que $0 \leq \mathbb{E}(X) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes et positives telles que $\mathbb{E}(X_0) < +\infty$ et
$$\forall \omega \in \Omega,\ X_n(\omega) \longrightarrow 0.$$
Montrer que $\mathbb{E}(X_n) \longrightarrow 0$.
3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes et positives telles que
$$\forall \omega \in \Omega,\ \sum X_n(\omega) \text{ converge vers un réel } X(\omega).$$
On suppose que X est une variable aléatoire discrète et positive, montrer que
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(X_n).$$

27 Séries entières

Exercice 481. On note a_n la n-ième décimale de $\sqrt{2}$, déterminer l'intervalle de définition de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Exercice 482. On note $d(n)$ le nombre de diviseurs supérieurs à 1 de n et $s(n)$ leur somme. Donner les rayons de convergence de $\sum_{n\geq 1} d(n)z^n$ et de $\sum_{n\geq 1} s(n)z^n$.

Exercice 483. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n}\,\mathrm{d}t$, donner un équivalent de I_n et étudier la série entière $\sum_{n\geq 1} I_n x^n$.

Exercice 484. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe, on note R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Pour $p \in \mathbb{N}$, trouver le rayon de convergence de $\sum a_n^p z^n$.

Exercice 485. On définit la fonction f par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ mais que f n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 486 (Formule de Cauchy-Hadamard)**.** Soit $(a_n)_{n\in N}$ une suite complexe, on note R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Montrer que

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}},$$

avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$.

Exercice 487. Donner le DSE de $x \longmapsto e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ en 0.

Exercice 488. Trouver un équivalent de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2^n}$ en 1.

Exercice 489. Montrer que la fonction $x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$ est définie sur $[-1, 1[$ et donner un équivalent en 1.

Exercice 490 (Un théorème d'Abel)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ telle que $\sum a_n R^n$ converge. Montrer que la convergence de la série est uniforme sur $[0, R]$ et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n = \lim_{x\to R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 491. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $\sum n a_n$ converge absolument. Vérifier que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1. Pour $|z| < 1$, on pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, et on suppose de plus que

$$a_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad |a_1| \geq \sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n|.$$

Montrer que f est injective.

Exercice 492 (Fonction absolument monotone)**.** Soit $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que f et toutes ses dérivées sont positives sur $]a, b[$. Montrer que f est analytique sur $]a, b[$.

Exercice 493 (Principe des zéros isolés)**.** Soit f la somme de la série entière $\sum a_n z^n$, définie sur son disque de convergence. Montrer que s'il existe une suite réelle non-nuls $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 et tels que $f(u_p) = 0$ pour tous $p \in \mathbb{N}$, alors $a_n = 0$ pour tous $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 494. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence infini. Pour $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right) e^{-int} \mathrm{d}t.$$

En déduire que si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors elle est constante.

Exercice 495. Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$. On note $A(r) = \max\left\{\mathrm{Re}(f(z)) \mid |z| = r\right\}$, pour $0 < r < R$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^{2\pi} \left(\mathrm{Re}(f(re^{it})) - A(r)\right) e^{-int} \mathrm{d}t$, en déduire que
$$|a_n| \leq \frac{2A(r) - 2\mathrm{Re}(a_0)}{r^n}.$$
2. En déduire le théorème suivant : si $R = +\infty$ et s'il existe $A, B > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$
$$\mathrm{Re}(f(z)) \leq A|z|^N + B,$$
alors f est un polynôme de degré au plus N.

Exercice 496 (Théorème de Borel)**.** Soit E l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, pour $p \in \mathbb{N}$ on définit sur E la norme $N_p(f) = \max_{0\leq q\leq p} \|f^{(q)}\|_\infty$.

1. Construire une fonction $\varphi \in E$, nulle en dehors de $[-1, 1]$ telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi^{(p)} = 0$ si $p \geq 1$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} N_n\left(\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) x^{n+1}\right) = 0$.
3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, construire une suite décroissante de réels strictement positifs $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$N_n\left(\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) x^{n+1}\right) \leq \min\left(1, \frac{1}{|a_{n+1}|}\right).$$
4. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $g(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon_{n-1}}\right) \frac{a_n x^n}{n!}$, montrer que g est $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie $g^{(n)}(0) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 497 (Nombres de Bell)**.** Soit B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments, exprimer B_n en fonction des B_k pour $k \leq n - 1$. En considérant $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n$, montrer que :

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

Exercice 498 (Calcul du nombre de dérangements)**.** Pour $0 \leq k \leq n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ avec k points fixes, on note $d_n = D_{n,0}$.

1. Montrer que $D_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k}$.
2. On pose $f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} z^n$, montrer que cette série entière a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et que pour $|z| < 1$, on a $e^z f(z) = \frac{1}{1-z}$.
3. En déduire la valeur de d_n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 499. On note $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ le développement en série entière de $x \longmapsto \sqrt{1 + x}$ et S_N les sommes partielles associées.

1. Montrer que $S_N(x)^2 - (1 + x)$ est un polynôme dont la dont la plus petite puissance de x est de degré $\geq N + 1$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = I_n + A$.

28 Equations différentielles II

Exercice 500 (Lemme de Gronwall)**.** Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ vérifiant :

— $g \geq 0$.

— $\forall t \geq 0,\ f(t) \leq a + \int_0^t f(u)g(u)\mathrm{d}u$.

Montrer que :

$$\forall t \geq 0,\ f(t) \leq a \exp\left(\int_0^t g(u)\mathrm{d}u\right).$$

Exercice 501.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) + \alpha f(x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$, montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f''(x) + f'(x) + f(x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

3. Soit D l'opérateur de dérivation et P un polynôme dont toutes les racines ont des parties réelles sont strictement négatives, montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} P(D)(f)(x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Exercice 502. Soient a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $t \longmapsto ta(t)$ et b sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$. Soit f une solution sur $\mathbb{R}_+$ de

$$y'' + a(t)y = b(t).$$

Montrer que f' admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 503. Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue négative.

1. Montrer que si $z \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ est solution de $z'' + f(x)z = 0$, alors z^2 est convexe.
2. En déduire que le problème $y'' + f(x)y = g(x)$ et $y(a) = y(b) = 0$ possède une unique solution sur $[a, b]$.

Exercice 504 (Equation de Bessel)**.** On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$. Vérifier que $x \longmapsto \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x \sin\theta)\mathrm{d}\theta$ est solution et déterminer les solutions développables en séries entières autour de 0.

Exercice 505. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f'(0) = 1$ et

$$f'' + 5f' + 6f \geq 0.$$

Montrer que $f(x) \geq 4e^{-2x} - 3e^{-3x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 506. Soient $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et (u, v) deux solutions de

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0.$$

1. Montrer que les zéros d'une solution non-identiquement nulle sont isolées.
2. Quelle équation différentielle vérifie la fonction $w(u, v) = uv' - vu'$?
3. Montrer que (u, v) est liée si et seulement si il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) = 0$.

4. Si u et v sont deux solutions indépendantes, montrer qu'entre deux zéros consécutifs de u il y a exactement un zéro de v.

Exercice 507. Soit $q : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable, on considère l'équation $y'' + q(x)y = 0$.

1. Soient u et v deux solutions bornées, montrer que (u, v) est liée.
2. En déduire qu'il existe des solutions non-bornées.

Exercice 508. Soit $q : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue non-nulle.

1. Montrer que toute solution de $y'' + q(x)y = 0$ s'annule au moins une fois.
2. Montrer que toute solution non-identiquement nulle de $y'' - q(x)y = 0$ s'annule au plus une fois.
3. On suppose de plus que $\lim_{x\to+\infty} q(x) = +\infty$, montrer que l'ensemble des zéros de toute solution de $y'' + q(x)y = 0$ n'est pas borné.

Exercice 509 (Théorie de Sturm-Liouville)**.**

1. Soient $q_1, q_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $q_1 \leq q_2$. Pour $i = 1, 2$, soit f_i une solution de
$$y'' + q_i(x)y = 0.$$
Si f_1 n'est pas identiquement nulle, montrer qu'entre deux zéros consécutifs de f_1 se trouve un zéro de f_2.
2. En déduire que si $q_1 \leq \omega^2$ pour $\omega > 0$, les zéros de y_1 sont distants d'au moins $\frac{\pi}{\omega}$.
3. De même, si $q_2 \geq \omega^2$ pour $\omega > 0$, montrer que tout intervalle de longueur $\frac{\pi}{\omega}$ contient un zéro de y_2.
4. Soit $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x) = \lambda > 0$. Montrer que les zéros positifs d'une solution non nulle de l'équation $y'' + q(x)y = 0$ forment une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(t_{n+1} - t_n) = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$.

Exercice 510. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique et $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ solution de $X' = AX$.

1. Montrer que $t \longrightarrow \|X(t)\|$ est constante.
2. Soit $a \in \ker(A)$, montrer que $t \longrightarrow (X(t)|a)$ est constante, en déduire que le mouvement est circulaire.

Exercice 511. Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et ϕ l'endomorphisme de E définit par $\phi(f)(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que ϕ ne stabilise aucun sous-espace de E non-trivial.

29 Calcul différentiel et fonctions à plusieurs variables

Exercice 512. Soit $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, où C est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $f(C)$ est un intervalle. En déduire que si $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et injective (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$), alors h est strictement monotone.

Exercice 513. Soit $u : [0, T] \times [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ une solution de l'équation de la chaleur $\partial_t u = \partial_x^2 u$ telle que
$$\forall t \in [0, T], u(t, a) = u(t, b) = 0.$$

On pose :

$$I_n(t) = \int_a^b u^{2n}(t,x)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad M(t) = \max\{|u(t,x)| \mid x \in [a,b]\}.$$

Montrer que I_n est décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que M est décroissante.

Exercice 514 (Principe du maximum pour le Laplacien)**.** Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$.

1. Supposons qu'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que u atteigne un maximum local en x_0, quel est le signe de $\Delta u(x_0)$?
2. On suppose que $\Delta u \geq 0$ sur $\overline{\Omega}$, montrer que :
$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$
3. En déduire le résultat d'unicité suivant : si $u, v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ sont deux fonctions vérifiant $\Delta u = \Delta v = 0$ et $u_{|\partial\Omega} = v_{|\partial\Omega}$, montrer que $u = v$ sur $\overline{\Omega}$.

Exercice 515 (Fonctions homogènes)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ une fonction homogène de degré $r \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t > 0,\ f(tx, ty) = t^r f(x,y).$$

1. Montrer que les dérivées partielles de f sont homogènes de degrés $r - 1$.
2. Montrer que f est homogène de degré r si et seulement si f vérifie l'équation suivante :
$$x\partial_x f + y\partial_y f = rf.$$
3. On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^2$, montrer que :
$$x^2\partial_x^2 f + 2xy\partial_{xy}^2 f + y^2\partial_y^2 f = r(r-1)f$$

Exercice 516. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, calculer sa différentielle en un point $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 517. Calculer l'aire maximale et le périmètre maximal d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon $R > 0$.

Exercice 518. Soit $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que $x \longmapsto \|x\|$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et donner son gradient.

Exercice 519. Soit $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que $x \longmapsto \frac{1}{\|x\|^2}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et donner son gradient.

Exercice 520. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, décrire géométriquement les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que
$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Exercice 521. Soit $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Montre que $f(x)$ ne dépend que de la norme euclidienne de x si et seulement si $\mathrm{grad} f(x)$ est colinéaire à x pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Exercice 522. Calculer les différentielles des fonctions suivantes :
- $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto M^2$.
- $M \in GL_n(\mathbb{R}) \longmapsto M^{-1}$.

Exercice 523 (Différentielle du déterminant)**.** On souhaite calculer la différentielle de l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Pour $t > 0$ et $1 \leq i, j \leq n$, calculer $\det(I_n + tE_{ij})$, en déduire $\frac{\partial \det}{\partial E_{ij}}(I_n)$ puis $D_{I_n} \det$.
2. En déduire $D_M \det$ pour M inversible.
3. Montrer que det est une application $\mathcal{C}^\infty$ et en déduire $D_M \det$ pour M quelconque.

Exercice 524. Soit $D = \left\{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \;\middle|\; x + y \leq 1\right\}$, montrer que D est un compact de $\mathbb{R}^2$. Pour $a, b, c > 0$ on note $f : (x, y) \in D \longmapsto x^a y^b (1 - x - y)^c \in \mathbb{R}$.

30 Topologie dans les espaces de matrices

Exercice 525. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$. En déduire que pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 526. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 527. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton : $\chi_A(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 528. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$, montrer que $\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B)$. En déduire que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \subset GL_n(\mathbb{R})$ et calculer $\det(\exp(M))$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 529. Montrer que $\exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 530. Montrer que $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est bien définie et bijective.

Exercice 531. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $D, T \in \mathcal{L}(E)$ définis par $D(P) = P'$ et $T(P)(X) = P(X + 1)$, montrer que $\exp(D) = T$.

Exercice 532. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\exp(A) = P(A)$.