Suites numériques et construction des réels

Arthur Touati

21 janvier 2017

Table des matières

1 Rappels

Les ensembles de nombres importants dans lesquels nous allons travailler sont les suivants :

— $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ est l'ensemble des entiers naturels.
— $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ est l'ensemble des entiers relatifs.
— $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}, (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\right\}$ est l'ensemble des nombres rationnels.
— $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui peuvent ou non s'écrire comme le quotient de deux nombres entiers. Par exemple, $\sqrt{2}$ appartient à $\mathbb{R}$ mais pas à $\mathbb{Q}$, comme on le sait depuis Euclide...

On voit d'ores et déjà qu'on ne peut pas vraiment définir $\mathbb{R}$ "avec les mains" comme on le fait pour les autres ensembles usuels. On reviendra sur la construction de $\mathbb{R}$ dans la dernière section.

Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ sont les briques élémentaires du langage mathématique. Ils se lisent respectivement "pour tout" et "il existe". Par exemple, la phrase mathématique "$\forall n \in \mathbb{N}, n+1 \in \mathbb{N}$" signifie simplement que pour tout entier naturel n, le nombre $n+1$ est encore un entier naturel. La phrase "$\exists x \in \mathbb{R}, x+1=3$" signifie juste qu'il existe un réel qui, ajouté à 1, donne 3.

Dans une phrase mathématique, l'ordre des quantificateurs est crucial et doit être respecté, une inversion de ces quantificateurs modifie totalement le sens de la phrase. Par exemple les phrases suivantes n'ont pas du tout le même sens (la deuxième est d'ailleurs fausse) :

— $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = y$
— $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x = y$

La valeur absolue d'un réel x est notée $|x|$ et vaut x si $x \geq 0$ et $-x$ si $x \leq 0$. On rappelle l'inégalité triangulaire et son corollaire immédiat (souvent appelé inégalité triangulaire inversée), vrais pour tous réels a et b :

— $|a+b| \leq |a| + |b|$
— $||a| - |b|| \leq |a+b|$

2 Convergence de suites

Dans ce cours, nous allons nous intéresser aux suites réelles, c'est-à-dire aux suites à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définissons ce qu'est une suite réelle :

Définition 1. *Une suite réelle est une fonction u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.*

On ne s'intéresse pas vraiment à l'aspect "fonction" et on note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite et $u(n) = u_n$ les éléments de la suite. Concrètement une suite réelle est une famille de réels indexée par $\mathbb{N}$.

Tout au long de ce cours, nous allons nous intéresser au comportement des suites. On donne pour commencer des définitions élémentaires.

Définition 2. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :*

1. *croissante lorsque :* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$

2. *décroissante lorsque :* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$
3. *majorée lorsque :* $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
4. *minorée lorsque :* $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$
5. *bornée lorsque :* $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$
6. *stationnaire lorsque :* $\exists A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n = A$

2.1 Définitions et premières propriétés

Intuitivement, une suite converge vers un réel ℓ si ses termes s'en approchent aussi près qu'on veut, sans plus s'en éloigner. Cela motive la définition importante suivante :

Définition 3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et ℓ un réel. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon \tag{1}$$

On dit aussi que la suite tend vers ℓ ou a pour limite ℓ. Une suite qui admet une limite est dite convergente. On a une équivalence évidente : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

On peut aussi imaginer la situation ou les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on veut ou aussi petits que l'on veut, cela motive les définitions suivantes :

Définition 4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

1. *On dit que la suite converge vers $+\infty$ lorsque :*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A \tag{2}$$

2. *On dit que la suite converge vers $-\infty$ lorsque :*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq A \tag{3}$$

On dit d'une suite qui ne converge vers aucun réel ni vers aucuns des deux infinis qu'elle diverge. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'exemple canonique de suite divergente. A partir de maintenant, si on dit d'une suite qu'elle est seulement convergente cela signifie qu'elle converge vers un réel fini et non vers un infini (dans ce cas on précisera vers quel infini elle converge).

Cela peut porter à confusion, mais on peut formaliser la notion de limite de façon à unir dans une même définition "converger vers une limite finie" et "converger vers un infini". C'est pour ça qu'on utilise aussi le mot "converger" pour les limites infinies.

Etant donnée une suite convergente, on aimerait pouvoir parler de sa limite, mais cela suppose que sa limite soit unique, c'est l'objet de la proposition suivante, appelée "unicité de la limite".

Proposition 1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ayant pour limite a et b deux réels, alors $a = b$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, supposons que $a \neq b$, par exemple $a < b$. On pose $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$. Par définition de la limite, il existe N' (resp. N'') tel que pour tout $n \geq N'$ (resp. $n \geq N''$) on ait $|u_n - a| \leq \varepsilon$ (resp. $|u_n - b| \leq \varepsilon$). On pose $N = \max(N', N'')$.

Vu comment on a définit notre ε, on a $b - \varepsilon > a + \varepsilon$. Or pour tout $n \geq N$, on a $u_n \geq b - \varepsilon$ et $a + \varepsilon \geq u_n$ ce qui est absurde. Donc $a = b$. □

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite (finie ou infinie) on la note souvent $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $\lim u_n$ s'il n'y a pas d'ambiguité. Il faut faire attention à n'écrire $\lim u_n$ que si on a déjà prouvé que la suite est convergente. De même il faut faire attention à l'énoncé des théorèmes, certains théorèmes ont besoin de l'hypothèse de convergence et nous renseignent sur la limite, d'autres prouvent qu'une suite est convergente, ce qui est très différent.

On donne maintenant une première propriété des suites convergente.

Proposition 2. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ayant ℓ pour limite. On utilise la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq 1$ ce qui implique par inégalité triangulaire inversée que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq 1 + |\ell|$. On pose $M' = \max\{u_k, 0 \leq k \leq N-1\}$ et $M = \max(M', 1 + |\ell|)$ et on a pour tout n, $|u_n| \leq M$. □

Exercice 1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes ayant pour limite a et b respectivement.*

1. *Montrer que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a + b$.*
2. *Montrer que la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ab.*

Exercice 2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers 0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée, montrer que $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Exercice 3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs entières.*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ un réel, montrer que $\ell \in \mathbb{Z}$.*
2. *En déduire qu'elle est convergente si et seulement si elle est stationnaire.*

On donne maintenant la liste des opérations que l'on peut effectuer sur les limites, dans la suite de l'exercice 1. Nous commençons par les opérations sur les limites finies, puis viennent les opérations sur les limites infinies.

Théorème 1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes et a et b deux réels. Alors :*

1. $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et* $\lim |u_n| = |\lim u_n|$.
2. $(au_n + bv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et* $\lim(au_n + bv_n) = a \lim u_n + b \lim v_n$.
3. $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et* $\lim u_n v_n = \lim u_n \lim v_n$.
4. *Si* $\lim v_n \neq 0$*, alors* $v_n \neq 0$ *à partir d'un certain rang et* $(\frac{u_n}{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie à partir d'un certain rang, elle est convergente et* $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$.

Théorème 2. *Dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites réelles, les résultats ci-dessus restent vrais si la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et/ou de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est infinie avec les règles arithmétiques suivantes :*

1. $a + \infty = +\infty$
2. $+\infty + \infty = +\infty$
3. $a \times (+\infty) = (sg(a))\infty$
4. $(\pm\infty) \times (\pm\infty) = \pm\infty$
5. $\frac{1}{\pm\infty} = 0$

En revanche, les opérations arithmétiques suivantes ne sont pas définies :

$$\infty - \infty \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad \frac{0}{0} \tag{4}$$

On parle de formes indéterminées parce qu'on peut trouver des exemples de suites donnant tous les résultats possibles.

2.2 Limites et inégalités

Les limites ont un très bon comportement avec les inégalités, comme le montrent les théorèmes utiles que nous allons démontrer dans cette partie. Le premier traduit la conservation des inégalités larges.

Théorème 3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et $N \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geq N, u_n \leq v_n$. Alors si elles sont toutes deux convergentes,* $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Démonstration. On note $a = \lim u_n$ et $b = \lim v_n$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $a > b$. On pose $\varepsilon = \frac{a-b}{3}$, on utilise la définition de la limite, on sait qu'il existe M tel que pour tout $n \geq M$, on ait simultanément $u_n \geq a - \varepsilon$ et $b + \varepsilon \geq v_n$. Mais notre choix de ε assure que pour tout $n \geq M$, $u_n > v_n$ ce qui est absurde si on prend aussi n plus grand que N. Donc $a \leq b$. □

Ce théorème ne prouve pas que les suites convergent, il faut d'abord avoir justifié soigneusement l'existence des limites pour pouvoir l'appliquer. Il faut aussi remarquer que les inégalités strictes ne se conservent pas : si $u_n < v_n$ pour tout n et si les deux suites convergent, alors on ne peut pas dire $\lim u_n < \lim v_n$ mais seulement $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Le théorème suivant s'appelle le théorème des gendarmes, il a l'avantage de prouver la convergence et de donner la valeur de la limite.

Théorème 4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et $N \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geq N, u_n \leq v_n \leq w_n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers une même limite finie, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi et*

$$\lim v_n = \lim u_n = \lim w_n \tag{5}$$

Démonstration. Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = \lim u_n = \lim w_n$. Soit $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait simultanément $\ell - \varepsilon \leq u_n$ et $w_n \leq l + \varepsilon$ donc pour tout $n \geq N$, on a bien $v_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ ce qui conclut. □

Le dernier théorème que l'on donne, dit théorème de convergence monotone, est très important car il pourrait être pris comme axiome de la construction de $\mathbb{R}$ à la place de la propriété de la borne supérieure. C'est pour cette raison qu'on ne donne pas ici la preuve, elle utilise la propriété de la borne supérieure, propriété équivalente à ce théorème qui pourrait aussi être pris comme axiome de la construction de $\mathbb{R}$.

Théorème 5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle admet une limite finie.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non-majorée, alors elle tend vers $+\infty$.*
3. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors elle admet une limite finie.*
4. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et non-minorée, alors elle tend vers $-\infty$.*

Pour finir cette partie, on donne en exercice un résultat classique : le théorème de Césaro et un de ses corollaires, le lemme de l'escalier.

Exercice 4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle, on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$.*

1. *On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers ℓ.*
2. *Si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que $(w_{n+1} - w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, montrer que $(\frac{w_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.*

3 Suites extraites et valeurs d'adhérence

Les suites convergentes dans $\mathbb{R}$ ne constituent pas toutes les suites réelles. Il nous faut une nouvelle notion pour raffiner notre étude des suites réelles. Par exemple, les suites suivantes ne sont pas convergentes mais elles possèdent une grande régularité que l'on a envie de décrire précisément : $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\max(0, n(-1)^n))_{n\in\mathbb{N}}$.

3.1 Suites extraites

Définition 5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.*

On rencontre aussi le terme sous-suite pour la suite extraite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et extraction (ou extractrice) pour la fonction φ. En terme de fonctions on a $v = u \circ \varphi$.

Concrètement, cela revient à ne considérer que certains termes de la suite, mais une infinité d'entre eux, à les renuméroter dans l'ordre croissant (sans répétitions) pour en faire une nouvelle suite.

L'étude des suites extraites d'une suite nous renseigne sur la suite initiale.

Exemple 1. — *Si $u_n = (-1)^n$, alors $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$.*
— *Si $u_n = \max(0, n(-1)^n)$ alors $u_{2n} = 2n$ et $u_{2n+1} = 0$.*

On va s'intéresser aux propriétés des sous-suites vis-à-vis de la convergence.

Proposition 3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, toutes ces suites extraites convergent vers ℓ.*

Démonstration. Soit $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite et soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Or $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ donc il existe M tel que pour tout $n \geq M$, $\varphi(n) \geq N$. Donc pour tout $n \geq M$, on a $|u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$. □

La réciproque est évidemment fausse. La convergence d'une ou de plusieurs sous-suites n'implique pas en général la convergence de la suite (voir l'exercice 7 ci-dessous). C'est vrai sous certaines conditions, comme le traduit la proposition suivante :

Proposition 4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N_1 (resp. N_2) tels que pour $n \geq N_1$ (resp. $n \geq N_2$), on a $|u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$ (resp. $|u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$). On pose $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$, pour tout $n \geq N$, n est soit pair soit impair donc $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. □

On imagine facilement des généralisations de ce résultat : si $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Au final ce qui compte c'est d'avoir un nombre fini de suites extraites telles que la réunion des images des extractions recouvrent tout $\mathbb{N}$, si elles sont toutes convergentes de même limite, alors la suite converge vers cette limite.

Les deux propriétés précédentes sont encore vraies si on remplace "converger vers $\ell \in \mathbb{R}$" par "converger vers $+\infty$" ou "converger vers $-\infty$".

Exercice 5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Exercice 6. *On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.*

1. *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.*
2. *En déduire que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.*

Exercice 7. *Trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne converge pas mais telle que pour tout $k \geq 2$, $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

3.2 Valeurs d'adhérence

Définition 6. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Un réel l est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si l est limite finie d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Concrètement, une valeur d'adhérence est un réel qui peut être approché par certains termes de la suite (alors qu'une limite est approché par la suite entière).

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, on définit $\mathrm{Adh}(u)$ comme l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.

On va s'intéresser aux propriétés de $\mathrm{Adh}(u)$, qui peut prendre des formes très variées suivant la suite que l'on considère, comme le montrent les exemples suivants et l'exercice 10.

Exemple 2. — *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, $Adh(u) = \{l\}$*
— *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$, $Adh(u) = \emptyset$.*
— *Si $u_n = \max(0, n(-1)^n)$, $Adh(u) = \{0\}$.*
— *Si $u_n = (-1)^n$, $Adh(u) = \{-1, 1\}$.*

On donne maintenant une caractérisation des valeurs d'adhérence qui ne fait pas intervenir d'extractrice, ce qui peut simplifier les notations dans certaines démonstrations.

Proposition 5. *Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on a l'équivalence suivante :*

$$\ell \in Adh(u) \iff \forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon \tag{6}$$

Démonstration. Si $\ell \in \mathrm{Adh}(u)$, il existe une extraction φ telle que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Il existe N' tel que pour tout $n \geq N'$ on ait $|u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$. La fonction φ est strictement croissante donc il existe p tel que pour tout $n \geq p$ on ait $\varphi(n) \geq N$. On pose $M = \max(N', p)$ et si $n \geq M$ on a $\varphi(n) \geq N$ et $|u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$.

Réciproquement si ℓ vérifie l'expression de droite, on va construire par récurrence une extraction φ telle que $|u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$, ce qui conclura. Pour $n = 1$, on utilise la propriété avec $\varepsilon = 1$ et $N = 1$. Si $\{\varphi(k), k \leq n\}$ est construit tel que pour tout $i, j \leq n$, on ait $\varphi(i) < \varphi(j)$ si $i < j$, on utilise la propriété avec $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ et $N = \varphi(n) + 1$. La fonction φ ainsi définie est bien strictement croissante et $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, qui est donc bien une valeur d'adhérence. □

Cette caractérisation ressemble à la définition de la limite, on a juste inversé les deux quantificateurs centraux. La paire de quantificateur "$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N$" traduit l'existence d'une infinité de termes de la suite qui vérifie une certaine propriété. Autrement dit si $\mathcal{P}(n)$ est une proposition logique traitant du n-ième terme d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et si cette suite vérifie "$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \mathcal{P}(n)$", on peut construire par récurrence une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie $\mathcal{P}(n)$ pour tout n. Cela permet de reformuler proprement certaines propriétés lourdes en quantificateurs.

Par exemple si on veut exprimer le fait qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers un réel ℓ. En niant quantificateur par quantificateur la définition de la limite, la suite vérifie :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| \geq \varepsilon \tag{7}$$

On peut donc construire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie $|u_{\varphi(n)} - \ell| \geq \varepsilon$ pour tout n et travailler avec cette suite, ce qui est beaucoup plus simple que de travailler avec un ensemble infini d'indice.

Nous allons maintenant prouver le théorème de Bolzano-Weierstrass, qui donne une condition simple sur une suite pour admettre au moins une valeur d'adhérence. Tout repose sur le lemme suivant, dit lemme des pics.

Lemme 1. *De toute suite, on peut extraire une sous-suite monotone.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, on considère l'ensemble :

$$A = \left\{k \in \mathbb{N}, \forall p > k, u_p < u_k\right\} \subset \mathbb{N} \tag{8}$$

Il y a deux possibilités, A est fini ou infini.

S'il est infini, alors on peut construire une extraction à valeurs dans A, la suite extraite correspondant est strictement décroissante donc monotone.

Si A est fini, il admet un plus grand élément m, on a alors pour tout $n \geq m+1$, il existe $p > k$ tel que $u_p \geq u_k$, on peut donc construire par récurrence une extraction associée à une suite extraite croissante. □

Voici le théorème de Bolzano-Weierstrass :

Théorème 6. *Toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.*

Démonstration. D'après le lemme des pics, on peut extraire une suite monotone, cette suite extraite est bornée (car la suite initiale l'est) donc convergente d'après le théorème de convergence monotone. □

Cette preuve est élégante mais elle n'est pas constructive, elle assure l'existence d'une valeur d'adhérence sans donner une méthode pour la calculer, elle ou la suite extraite correspondante. Une preuve plus constructive existe, en donnant une formule explicite pour la plus grande (et plus petite) valeur d'adhérence.

On peut donner une application du théorème de Bolzano-Weierstrass, qui est très utile en pratique :

Proposition 6. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée, alors elle converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.*

Démonstration. Le sens direct est évident. Si maintenant il existe a tel que $\mathrm{Adh}(u) = \{l\}$, montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a. Par l'absurde, supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers a, alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - a| > \varepsilon \tag{9}$$

On peut donc construire une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie $|u_{\varphi(n)} - a| > \varepsilon$ pour tout n. La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc par Bolzano-Weierstrass elle admet une valeur d'adhérence b nécessairement distincte de a, b est aussi une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ce qui contredit l'unicité de a. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a. □

L'hypothèse $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée est cruciale (se rappeler de $u_n = \max(0, n(-1)^n)$).

Pour finir cette partie, nous démontrons une proposition qui donne la forme générale de $\mathrm{Adh}(u)$. Cela va nous permettre d'introduire du vocabulaire de topologie.

Proposition 7. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et ℓ un réel. S'il existe une suite de valeurs d'adhérence $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Adh(u)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ, alors $\ell \in Adh(u)$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe N' tel que pour tout $n \geq N'$ on ait $|a_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On pose $N'' = \max(N', N)$.

On applique la caractérisation des valeurs d'adhérence à $a_{N''}$ avec N'' et $\frac{\varepsilon}{2}$: il existe $p \geq N''$ tel que $|u_p - a_{N''}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc $p \geq N$ et comme $N'' \geq N'$ on a bien :

$$|u_p - \ell| \leq |u_p - a_{N''}| + |a_n - \ell| \leq \varepsilon \tag{10}$$

On a bien montré la caractérisation des valeurs d'adhérence pour ℓ. □

On voit l'intérêt de la caractérisation des valeurs d'adhérence, sans ce résultat on aurait du considérer une suite d'extraction, c'est-à-dire une suite de suite...

Une partie de $\mathbb{R}$ qui contient les limites de ses suites convergentes est dite fermée. Le complémentaire d'un fermé est dit ouvert. On a les premiers exemples suivants :

— $[0,1]$ est fermé, $]0,1[$ est ouvert, $[0,1[$ n'est ni ouvert ni fermé.

— $\mathbb{Z}$ est fermé, $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé.

Les parties ouvertes sont telles qu'autour de chacun de leur point, on peut définir un petit intervalle encore contenu dans la partie, ce sont les parties "sans bord", plus rigoureusement une partie $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall x \in \mathcal{O}, \exists r > 0,]x-r, x+r[\subset \mathcal{O} \tag{11}$$

On appelle intervalles ouverts les partie de $\mathbb{R}$ de la forme $]a,b[$ où $a < b$. Un théorème nous dit que les ouverts de $\mathbb{R}$ sont exactement les réunions dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Exercice 8. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone admettant une valeur d'adhérence, montrer qu'elle est convergente.*

Exercice 9. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite bornée telle que* $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0*. Montrer que* $Adh(u)$ *est un intervalle non-vide.*

Exercice 10. 1. *Trouver une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $Adh(u) = \mathbb{N}$*.*

2. *Trouver une suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\mathbb{Q} \subset Adh(v)$*.*

3. *Montrer que* $Adh(v) = \mathbb{R}$*.*

4 Suites de Cauchy et construction de $\mathbb{R}$

On va s'intéresser à une construction possible de $\mathbb{R}$. Cette construction va nous permettre de comprendre pourquoi les réels constituent un meilleur endroit que les rationnels pour faire de l'analyse.

Une fois que l'on se donne $\mathbb{N}$, définir $\mathbb{Z}$ puis $\mathbb{Q}$ semble être assez naturel, mais comment construire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$? Comment définir des quantité comme $\sqrt{2}$ ou π à partir des rationnels ?

Si on suppose $\mathbb{R}$ construit, on sait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie concrètement que tout réel est limite d'une suite de rationnels. On peut alors voir $\sqrt{2}$ comme la limite d'une suite rationnelle. Mais si on restreint notre horizon de nouveau à $\mathbb{Q}$, comment parler de limite pour une suite qui converge au delà de cet horizon ? En effet la définition de la limite fait explicitement référence à la limite, on aimerait une définition de la convergence qui ne fasse intervenir que les termes de la suites, pour pouvoir rester dans $\mathbb{Q}$. La notion de suite de Cauchy va permette cela.

4.1 Suites de Cauchy

Pour appréhender cette notion, nous nous replaçons dans le cadre des suites réelles, où $\mathbb{R}$ est supposé déjà défini.

Définition 7. *Une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite de Cauchy lorsqu'elle vérifie :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \geq N, |u_n - u_p| \leq \varepsilon \tag{12}$$

Concrètement, les termes d'une suite de Cauchy se rapprochent à l'infini. On a envie de dire que cela équivaut à la convergence. La réciproque est évident : une suite convergente est une suite de Cauchy. C'est le sens direct qui est moins évidente. Il est pourtant vrai, on va avoir besoin de deux lemmes pour le montrer.

Lemme 2. *Une suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. On utilise la définition d'une suite de Cauchy avec $\varepsilon = 1$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - u_N| \leq 1$ donc, par inégalité triangulaire inversée, $|u_n| \leq 1 + |u_N|$. On pose $M = \max(1 + |u_N|, \max_{1 \leq k \leq N-1} |u_k|)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. □

Lemme 3. *Une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy admettant ℓ pour valeur d'adhérence, montrons qu'elle converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$, par définition d'une suite de Cauchy, il existe N tel que pour tout $n, p \geq N$ on ait $|u_n - u_p| \leq \frac{varepsilon}{2}$.

Par caractérisation des valeurs d'adhérence, il existe $m \geq N$ tel que $|u_m - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Si $n \geq N$, on a alors $|u_n - \ell| \leq |u_n - u_m| + |u_m - \ell| \leq \varepsilon$, ce qui conclut. □

On peut maintenant énoncer le théorème important suivant :

Théorème 7. *Une suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

Si elle est de Cauchy, elle est bornée (d'après le lemme 2) et d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass elle admet une valeur d'adhérence donc converge d'après le lemme 3.

Si elle converge vers un réel ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|u_m - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Maintenant si $n, p \geq N$, on a $|u_n - u_p| \leq |u_n - \ell| + |\ell - u_p| \leq \varepsilon$. □

Ce résultat est très intéressant parce qu'il permet de montrer qu'une suite converge sans connaître sa limite, il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy.

4.2 Une construction des réels

On dit qu'un espace métrique est complet si toutes ses suites de Cauchy sont convergentes de limite dans l'espace en question. Nous comprendrons plus loin pourquoi on a choisi ce terme. Le théorème précédent nous dit que $\mathbb{R}$ est complet.

En plus de donner une démonstration de l'irrationnalité de la constante de Neper, l'exercice suivant nous montre que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. En effet il exhibe une suite convergente de rationnels dont la limite n'est pas rationnelle (cette suite est de Cauchy car elle est convergente).

Exercice 11. *Pour $n \geq 0$ on pose $r_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$*

a. *Montrer que si $m > n > 2$, $|r_m - r_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} \times (1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{m-n-1}})$.*

b. *En déduire que si $m > n > 2$, $|r_m - r_n| \leq \frac{1}{2n!}$.*

c. *En déduire que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note e sa limite.*

d. *Montrer que e est irrationnel en raisonnant par l'absurde et en regardant $n!(e - r_n)$.*

Théorème 8. $\mathbb{Q}$ *n'est pas complet.*

Démonstration. Il suffit d'exhiber une suite de Cauchy à valeurs rationnelle qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exercice précédent convient. □

Il faut voir $\mathbb{R}$ comme le complété de $\mathbb{Q}$ (on parle aussi de complétion), c'est-à-dire un espace complet tel que $\mathbb{Q}$ s'injecte dans une partie dense. Le complété d'un espace est unique à isométrie bijective près. On a rajouté les limites des suites de Cauchy rationnelle pour rendre $\mathbb{Q}$ complet, on l'a complété (d'où la terminologie).

On présente ici une façon de définir le complété de $\mathbb{Q}$. On considère l'ensemble des suites de Cauchy rationnelles :

$$C = \left\{ (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \geq N, |r_n - r_p| \leq \varepsilon \right\} \tag{13}$$

On a envie d'identifier C et $\mathbb{R}$, autrement dit de voir un réel comme une suite de Cauchy rationnelle, mais si plusieurs éléments de C converge vers le même réel, on aurait plusieurs copies de ce réel dans notre ensemble $\mathbb{R}$, pour éviter cela, on définit une relation d'équivalence sur C : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} |u_n - v_n| = 0$ (la limite est une limite dans $\mathbb{Q}$, avec des ε pris dans $\mathbb{Q}_+^*$). En effet, deux suites de Cauchy rationnelles vont représenter le même réel si leur limite sont égales ou autrement dit si $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Un réel est alors vu comme une classe d'équivalence de C sous la relation $\sim$, c'est-à-dire qu'on définit $\mathbb{R}$ comme le quotient :

$$\mathbb{R} := {}^{C}/_{\sim} \tag{14}$$

L'opération de quotient permet de donner le même nom à deux suites de Cauchy qui ont concrètement la même limite réelle. $\mathbb{Q}$ s'injecte naturellement dans ${}^{C}/_{\sim}$ en envoyant un rationnel sur la suite constante égale à lui-même.

On peut munir ce nouvel ensemble d'une topologie et d'une structure de corps commutatif pour en faire l'ensemble $\mathbb{R}$ qu'on connait depuis les petites classes.

Plus tôt dans cet exposé, nous avons dit que le théorème de convergence monotone pouvait être pris comme axiome de définition de $\mathbb{R}$. En réalité plusieurs énoncés peuvent être pris comme axiome de définition de $\mathbb{R}$. On en donne trois qui nous ont été utile, plus ou moins explicitement, dans cet exposé :

1. toute partie bornée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieur.

2. toute suite de $\mathbb{R}$ monotone admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
3. toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ est convergente.

Ces trois énoncés sont équivalents. Dans la première partie de cet exposé, nous avons supposé le premier axiome vrai et montré le deuxième (théorème 5) puis le troisième (théorème 7). On aurait pu procéder dans un ordre différent, la construction de $\mathbb{R}$ par les suites de Cauchy rationnelles nous encourage à commencer par le troisième axiome

Pourquoi a-t-on besoin de $\mathbb{R}$? Pourquoi ne pas se satisfaire de $\mathbb{Q}$? Le but de l'analyse est d'étudier les fonctions et leurs propriétés liées à la continuité, la dérivabilité, l'intégration etc. Beaucoup de théorèmes (par exemple le très important théorème du point fixe) ne sont vrais que dans des espaces complets. Ces théorèmes cherchent à prouver l'existence d'un point x vérifiant une certaine condition (par exemple $f(x) = x$). Une idée assez générale de preuve et de définir une suite de Cauchy et d'utiliser la propriété d'être complet pour définir x comme la limite de cette suite.

Cette stratégie de construction s'arrête là dans le sens où le complété d'un espace déjà complet est l'espace lui-même. Pour construire $\mathbb{C}$ il faut procéder différemment...